אלגברה ב' 1 - הרצאה 3 - 30.8.12

<u>טענה</u>: אם G חבורה, $H \le G$, $[G:H]=2$, אז $H \triangleleft G$.

<u>הוכחה</u>: ניקח $g \in G$, אם $g \in H$ אזי $gH = H = Hg$. אם $g \notin H$, לפי טענה מהשיעור שעבר מתקיים:

$$G = H \uplus gH,\ G = H \uplus Hg$$
$$\Rightarrow gH = G \setminus H = Hg$$

<u>טענה</u>: תהי G חבורה, ונניח ש- $N_1, N_2 \triangleleft G$, אזי מתקיים: $N_1 \cap N_2 \triangleleft G$.

<u>הוכחה</u>: יהיו $h \in N_1 \cap N_2$, $g \in G$.

$$gNg^{-1} \in N_1,\ gNg^{-1} \in N_2 \Rightarrow gNg^{-1} \in N_1 \cap N_2$$

<u>הערה</u>: ניתן להכליל את הטענה לאוסף $\{N_i\}_{i=1}^{n}$, ואז יתקיים $\bigcap_{i=1}^{n} N_i \triangleleft G$.

<u>טענה</u>: נניח $H \le G$, $N \triangleleft G$, אזי $HN \le G$.

<u>הוכחה</u>: יהיו $h_1n_1, h_2n_2 \in HN$.

$$h_1n_1 \cdot h_2n_2 = h_1(n_1h_2)n_2 = h_1(h_2n_1')n_2 \in HN$$

כי $n_1h_2 \in Nh_2 = h_2N$ (N נורמלית). לכן HN מקיימת סגירות לפעולה.

$$(h_1n_1)^{-1} = n_1^{-1}h_1^{-1} = h_1^{-1}n' \in HN$$

מאותם שיקולים, ולכן HN מקיימת סגירות להפכי, כלומר זו תת חבורה של G. ▨

<u>הערה</u>: באופן שקול, גם NH תת חבורה.

<u>טענה</u>: אם $N, H \triangleleft G$ אזי $HN \triangleleft G$.

<u>הוכחה</u>: לפי טענה קודמת זו תת חבורה. נראה שהיא נורמלית.
יהיו $g \in G,\ hn \in HN$. מתקיים:

$$ghng^{-1} = \underbrace{(ghg^{-1})}_{\in H}\underbrace{(gng^{-1})}_{\in N} \in HN$$

▨

תרגיל: נניח ש- $H_1, H_2 \le G$, G סופית. אזי:

$$|H_1H_2| = \frac{|H_1|\cdot|H_2|}{|H_1 \cap H_2|}$$

משפט ההומומורפיזם (משפט האיזומורפיזם הראשון): תהי G חבורה, ויהי $\varphi : G \to K$ הומומורפיזם. אזי: $G/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$.

הוכחה: נגדיר העתקה $\xi : G/\ker\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ על ידי $\xi(g\cdot\ker\varphi) = \varphi(g)$.
נראה ש- ξ מוגדרת היטב.
נניח $g_1\ker\varphi = g_2\ker\varphi$, אז $g_1^{-1}g_2 \in \ker\varphi$. לפיכך, $(\varphi(g_1))^{-1}\varphi(g_2) = \varphi(g_1^{-1}g_2) = e$,
כלומר $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$.

$$\xi(g_1\ker\varphi\cdot g_3\ker\varphi) = \xi(g_1g_3\ker\varphi) = \varphi(g_1g_3) = \varphi(g_1)\varphi(g_3) = \xi(g_1\ker\varphi)\xi(g_3\ker\varphi)$$

לכן ξ הומומורפיזם. נראה חח"ע:

$$\varphi(g) = \xi(g\ker\varphi) = e \Rightarrow g \in \ker\varphi \Rightarrow g\ker\varphi = \ker\varphi$$

נראה ש- ξ על. ניקח $\varphi(g) \in \operatorname{Im}\varphi$, אזי $g\ker\varphi$ מקור של $\varphi(g)$ תחת ξ, לכן ξ על, כלומר ξ איזומורפיזם. ▨

דוגמה: נגדיר ההעתקה $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$ על ידי $\varphi(k) = k \bmod 4$. קל לראות ש- φ הומומורפיזם, ומתקיים:

$$\operatorname{Im}\varphi = \{0,1,2,3\} = \mathbb{Z}_4$$
$$\ker\varphi = \{k \mid \varphi(k) = 0\} = 4\mathbb{Z}$$

לכן, לפי משפט ההומומורפיזם, מתקיים $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_4$ (וזה למשל, הסבר לסימון מתורת המספרים).

דוגמה: מהו $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$?
נסמן ב- C את מעגל היחידה המרוכב. זוהי חבורה ביחס לכפל המרוכב. נראה $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong C$.
נגדיר העתקה $\varphi : \mathbb{R} \to C$ על ידי $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$. לפי חוקי חזקות, זהו הומומורפיזם. נראה ש- φ על: נניח $z \in C$, ונוכל לכתוב $z = e^{i\theta}$, אבל $\varphi(\frac{\theta}{2\pi}) = e^{i\theta} = z$.

$$\ker\varphi = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x) = 1\} = \mathbb{Z}$$

לכן, לפי משפט ההומומורפיזם, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong C$.

הערה: כל אפימורפיזם הוא העתקת מנה.

הסבר: אם $\varphi : H \to G$ אפימורפיזם, אזי לפי משפט ההומומורפיזם $G/\ker\varphi \cong K$.

דוגמה: מהי $\mathbb{C}^x/C$? נגדיר העתקה $\varphi:\mathbb{C}^x\to\mathbb{R}^x$ על ידי $\varphi(z)=|z|$, אזי מתקיים:

$$\varphi(zw)=|zw|=|z||w|=\varphi(z)\varphi(w)$$

ולכן φ הומומורפיזם.

$$\operatorname{Im}\varphi=(o,\infty)$$
$$\ker\varphi=\{z\in\mathbb{C}^x\mid |z|=1\}=C$$

לכן, לפי משפט ההומומורפיזם, $\mathbb{C}^x/C\cong(o,\infty)$.

תרגיל: מהי $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$? כאשר $GL_n(\mathbb{R})$ זו חבורת המטריצות ההפיכות מסדר n,

$$SL_n(\mathbb{R})=\{A\in GL_n(\mathbb{R})\mid |A|=1\}$$

טענה: $SL_n(\mathbb{R})\lhd GL_n(\mathbb{R})$ וחבורת המנה המתאימה היא $\mathbb{R}^x$.

הוכחה: נגדיר העתקה $\varphi:GL_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^x$ ע"י $\varphi(A)=|A|$. מכפליות הדטרמיננטה φ הומומורפיזם. $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}^x$, כי עבור $x\in\mathbb{R}^x$ מתקיים $\varphi\begin{pmatrix} x & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}=x$. מתקיים $\ker\varphi=SL_n(\mathbb{R})$, ולכן $SL_n(\mathbb{R})\lhd GL_n(\mathbb{R})$ ו- $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^x$. ▨

הגדרה: תהי G חבורה ו- $N\lhd G$. נסמן ב- π את ההעתקה הקנונית $\pi:G\to G/N$ המוגדרת על ידי $\pi(g)=gN$. ברור ש- π אפימורפיזם.

משפט ההומומרפיזם (גרסא מורחבת): יהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם של חבורות, כך ש- $N\le\ker\varphi$, אז קיים הומומורפיזם יחיד $\varphi^*:G/N\to H$ המקיים $\varphi^*\circ\pi=\varphi$. יתר על כן, מתקיים:

I. φ^* חח"ע אמ"ם $\ker\varphi=N$.

II. $\operatorname{Im}\varphi^*=\operatorname{Im}\varphi$.

הוכחה: נגדיר את φ^* להיות $\varphi^*(gN)=\varphi(g)$. נבדוק ש- φ^* מוגדר היטב.
נניח $g_1N=g_2N$, אז $g_2^{-1}g_1\in N\subseteq\ker\varphi$. לכן $\varphi(g_2^{-1}g_1)=e$, כלומר $\varphi(g_1)=\varphi(g_2)$.
בודקים ישירות ש- φ^* הומומורפיזם.

$$(\varphi^*\circ\pi)(g)=\varphi^*(\pi(g))=\varphi^*(gN)=\varphi(g)$$

לכן $\varphi^*\circ\pi=\varphi$.

נראה יחידות: אם $\psi: G/N \to H$ הומו' כך ש- $\psi\circ\pi=\varphi$ אז:

$$\psi(\pi(g))=\varphi(g)$$
$$\psi(gN)=\varphi(g)=\varphi^*(gN)\Rightarrow\psi=\varphi^*$$

.I
$$\ker\varphi^*=\{gN\mid\varphi(g)=e\}=\{gN\mid g\in\ker\varphi\}$$
$$\ker\varphi^*=N\Leftrightarrow\{gN\mid g\in\ker\varphi\}=N\Leftrightarrow\{g\mid g\in\ker\varphi\}=\{g\mid g\in N\}\Leftrightarrow\ker\varphi=N$$

.II
$$\operatorname{Im}\varphi^*=\{\varphi^*(gN)\mid gN\in G/N\}=\{\varphi^*(gN)\mid g\in G\}=\{\varphi(g)\mid g\in G\}=\operatorname{Im}\varphi$$

▨

<u>משפט האיזומורפיזם השני</u>: תהא G חבורה, $H\le G$, $N\lhd G$, $HN\lhd G$, אזי מתקיים:

$$HN/N\cong H/H\cap N$$

<u>הערות</u>:

I. נניח ש- $G_3\le G_2\le G_1$. אם $G_3\le G_1$, אז $G_3\le G_2$. זאת מכיוון שאם $g_2\in G_2,\ g_3\in G_3$, אזי $g_2g_3{g_2}^{-1}\in G_3$, כי בפרט $g_2\in G_1$.

II. אם $N\lhd G$, $H\le G$, אזי $H\cap N\lhd H$.
נניח $h\in H,\ n\in H\cap N$, אזי $hnh^{-1}\in N$ מהנורמליות של N, ו- $hnh^{-1}\in H$ בשל סגירות h לפעולה.

<u>הוכחת המשפט</u>: נגדיר העתקה $\varphi: H\to HN/N$ על ידי $\varphi(h)=h\cdot e\cdot N=hN$.

$$\varphi(h_1h_2)=h_1h_2N=h_1N\cdot h_2N=\varphi(h_1)\cdot\varphi(h_2)$$

לכן φ הומומורפיזם. נראה: $\operatorname{Im}\varphi=\{hN\mid h\in H\}$.
נניח ש- $hnN\in HN/N$, ואז $\varphi(h)=hN=hnN$ ולכן φ על.

$$\ker\varphi=\{h\in H\mid\varphi(h)=N\}=\{h\in H\mid hN=N\}=\{h\in H\mid h\in N\}=H\cap N$$

ולכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון: $H/H\cap N\cong HN/N$. ▨

<u>הגדרה</u>: תהא G חבורה, $\varnothing\ne A\subseteq G$. התת חבורה הנוצרת על ידי A, המסומנת $\langle A\rangle$, היא: $\langle A\rangle=\{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\mid a_i\in A\cup A^{-1}\}$, כאשר e זו המכפלה הריקה, ובהכרח $e\in\langle A\rangle$. קל לראות שזו אכן תת חבורה (סגירות להפכי, לפעולה).

<u>אפיון שקול</u>: $\langle A\rangle$ היא חיתוך של התת חבורות של G שמכילות את A.

הוכחה: נסמן ב- $\{H_i\}_{i\in I}$ את אוסף תת החבורות של G שמכילות את A. אם $i\in I$ ונניח $a_1,a_2,...,a_k\in\langle A\rangle$, אזי $a_1,a_2...,a_n\in H_i$ (סגירות), לכן $\langle A\rangle\subseteq\bigcap_{i\in I}H_i$. גם $\langle A\rangle$ זו תת חבורה של G המכילה את A, לכן קיים i עבורו $\langle A\rangle=H_i$, ולכן $\langle A\rangle=H_i\supseteq\bigcap_{j\in I}H_j$. ▨

לפיכך, $\langle A\rangle=\bigcap_{i\in I}H_i$. במילים אחרות, $\langle A\rangle$ זו התת חבורה הקטנה ביותר של G המכילה את A.

טענה: תהי G חבורה סופית שבה שבה כל איבר חוץ מאיבר היחידה הוא מסדר 2. הוכח שהסדר של G הוא 2^k.

הוכחה: נראה תחילה כי G אבלית. נניח $x,y\in G$.

$$(xy)^2=e=(xy)(xy)$$
$$\Rightarrow yx=(xy)(xyyx)=xy$$

לכן G אבלית. תהי $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ קבוצת יוצרים מינימלית של G, כלומר $\langle A\rangle=G$ (G סופית, ולכן קבוצה כזו קיימת). לפיכך, כל איבר g ב- G ניתן לכתוב בצורה יחידה:

$$g=a_1^{e_1}\cdot a_2^{e_2}\cdot...\cdot a_n^{e_n}$$

כאשר $e_i\in\{0,1\}$. נוכיח את יחידות ההצגה: נניח בשלילה ש:

$$g=a_1^{e_1}\cdot a_2^{e_2}\cdot...\cdot a_n^{e_n}=a_1^{f_1}\cdot a_2^{f_2}\cdot...\cdot a_n^{f_n}$$

כאשר בה"כ $e_1=0,\ f_1=1$. ניתן לכתוב: $a_1=a_2^{e_2-f_2}\cdot a_3^{e_3-f_3}\cdot...\cdot a_n^{e_n-f_n}$, בסתירה למינימליות קבוצת היוצרים.
נגדיר העתקה $\varphi:G\to\mathbb{Z}_2^{\,n}$ ע"י:

$$\varphi(a_1^{e_1}\cdot a_2^{e_2}\cdot...\cdot a_n^{e_n})=(e_1,e_2,...,e_n)$$

ברור ש- φ על. φ חח"ע מיחידות ההצגה של איברי G. לכן, $|G|=|\mathbb{Z}_2^{\,n}|=2^n$. ▨