

משפט סילוב

אלה נניח G מסדר n $1 \leq k \leq n$ p ראשוני
 $H \triangleleft G$ מסדר p^k

בידיון

באינדוקציה על n : בסיס - $n=0$: ברור.

מחבר: נניח $n \geq 1$, דהיינו $|G| = p^n$, $|H| = p^k$ - ברור $(H = \{e\})$

יהי $n \geq k > 0$. $Z(G) \neq \{e\}$ (כי G חבורת פ) $\Rightarrow$ יש $c \neq e \in Z(G)$

נצייר $L = \langle c \rangle$. ניקח את c כן $|L| = p$

(אפשר להשתמש קוסי מופל של $Z(G)$). $|G/L| = p^{n-1}$

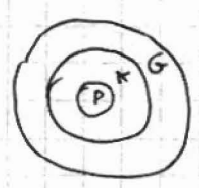
מהנחת האינדוקציה על G/L יש $H/L \triangleleft G/L$ מסדר $|H/L| = p^{k-1}$

אז, משפט הפקטור, $H \triangleleft G$ וכן $|H| = |L| \cdot p^{k-1} = p^k$

שאלה

האומנות של פראטני: נניח, G חבורה סופית, ו- p חבורת סילוב

p , ו- $K \triangleleft G$ כך $p < K$ אז $G = K \cdot N(P)$ (כאן $p < K < G$)



הוכחה

ל G $g \in G$, $g^{-1}kg \in K$ כי K חבורת סילוב

$g^{-1}kg \in P$ בן חבורת סילוב - G אבל גם K , $g \in K$

כך $g^{-1}kg = k$ $g \in N(P)$ $g \in K \cap N(P) = K \cap P = P$ (כי $K \cap P = P$)

שאלה

נניח $N(P) < L < G$ p סילוב p $N(L) = L$

בידיון

נבדל את אומנות פראטני על $N(L) < L$

ונקבל כי $N(L) = L \cdot N(P)$ (הכוונה כאן היא $N(P) \leq N(L)$)

$$L \cdot N(P) \leq L \cdot N(P) = L$$

כי $N(P) \leq L$ מהנחת הקודם.

מסקנה: $N(N(P)) = N(P)$ p סילוב p

קובץ

סעיף 1) $\mathbb{Z}^m \neq \mathbb{Z}^n$, כאשר $\mathbb{Z}^n$ נובעת מ- n איברים

ואם $n \neq m$: ברור $\mathbb{Z}^n$ נוצר מ- n איברים : $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = \mathbb{Z}^n$
 $\mathbb{Z}^n = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ נניח . $(e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0))$

Q^l וסתיה למימון $Q^l = \text{span}\{b_1, \dots, b_n\} \supset \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$
 כל n $\varphi: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ mcn

$$\mathbb{Z}^n = \varphi(\mathbb{Z}^m) = \varphi(\langle x \rangle) = \langle \varphi(x) \rangle$$

$\uparrow$ תמונת $\mathbb{Z}^m$ בת m איברים
 $\uparrow$ תמונת $\mathbb{Z}^n$ בת n איברים

לד

קב" G תבורי מסדר pq , $p < q$. אז $p-1$ q G ציקל
 ואם $q/p-1$ אז G ציקל או $G = \langle a, b \rangle$ $a^q = 1$ $b^p = 1$
 $a^{-1}ba = b^r$ $r \not\equiv 1 \pmod{p}$ $r \equiv 1 \pmod{q}$

הוכחה

מסתבר, ונוני להוכיח במקרה $p-1$ q . נניח G על ציקל
 נניח מסדר p תבורי סגור Q , חבורת סגור q אז
 $P \trianglelefteq G$. $Q = \langle a \rangle$, $P = \langle b \rangle$. $|G| = pq = |PQ|$ $|PQ| = |P||Q|$ $|P| = p$ $|Q| = q$
 $a^q = 1$, $b^p = 1$

$$a^{-1}ba = b^r \quad 0 \leq r < p \quad \text{אם } r \equiv 1 \pmod{p} \text{ אז}$$

$$ba = ab \iff a^{-1}ba = b \iff ba = ab \iff a^{-1}ba = b$$

הוכחה נכונה
 נניח $G = \langle a, b \rangle$ ציקל

$$a^{-2}ba^2 = a^{-1}(a^{-1}ba)a = a^{-1}b^ra = (a^{-1}ba)^r = (b^r)^r = b^{r^2}$$

$$a^{-q}ba^q = b^{(r^q)}$$

$$b^{r^q-1} = 1$$

וקיבלנו:

$$(p \nmid r) \quad r^q \equiv 1 \pmod{p}$$