

גרסא: מצאנו צורה נכסית צורה, עמוד המכילה:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ -1 & -1 & & & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

פתרון: חשבו יש מילה כי  $PA(t) = t^5$

וכן, יש צ"ע יחיד, 0, (לחץ אל הפולינום):

$$(N(A)) = \ker A = \ker TA, \quad TA: F^5 \rightarrow F^5, \quad x \mapsto A \cdot x$$

$$\ker A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\ker A^2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$0 \subset \ker(\lambda I - A) \subset \ker(\lambda I - A)^2 \subset \ker(\lambda I - A)^3$$

$$\ker A^3 = F^5$$

טבלת פקטורים שלו למטה כך:

|   |        |       |
|---|--------|-------|
| 3 |        |       |
| 2 | $AV_1$ | $V_2$ |
| 1 | $V_1$  |       |

\* נקח וקטור  $\ker A^3 \setminus \ker A^2$  - נ

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כך, (על  $\{AV_1\}$  וקטורה בסיס)  $\ker A^3 / \ker A^2$  - 2

-2-

ישרים:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כאן,  $A^2V_1, AV_2$  ימין וקטורים כחוצים,  $\ker A$

זמן, בסיס צורבן

$$B = (A^2V_1, AV_1, V_1, AV_2, V_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

~~אם~~

$$(TA)_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = [A^2V_1 \dots V_2]$$

אם

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = J$$

אם

וגם: מצא בסיס צורבן וצורת צורבן עקב:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & 2 & & & \\ 1 & 0 & 2 & & \\ 0 & 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

פתרון: הפולינום האופייני הוא:  $P_A(x) = (x-2)^3(x-1)^2$

המסלול החזק של בסיס צורבן השייך ל-1.

$$\ker(A-I) = \dots = \text{span} \{e_5\}$$

$$\ker(A-I)^2 = \dots = \text{span} \{e_4, e_5\}$$

השורה נמצאת ב  $\ker(A-I)^2$  כי:

$$\dim \ker(A-I)^2 = 2$$

הריבוי האלקטרי של העץ 1.

-3-

הסבר על נכונות:

$\begin{matrix} & e_5 \\ 1 & e_4 \end{matrix}$ 
 $\ker(A-I)$  ו- $\ker(A-I)^2$  הם תת-חלל, ויש להם בסיס  
 בסיס של:

עמודי  $\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$

$$N(A-2I) = \dots = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$N(A-2I)^2 = \dots = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מרחב ממ"מ = 3 = המימד המאגרי של  $\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$ .

כלל נכונות.

$\begin{matrix} 2 & v_2 & v_3 \\ 1 & v_1 \end{matrix}$ 
 $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
 $N(A-2I)$  ו- $N(A-2I)^2$  הם תת-חלל, ויש להם בסיס

$v_2 = (A-2I)v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 
 $\ker(A-2I)$

$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 
 $\ker(A-2I)$ 
 $B = \{e_5, e_4, v_2, v_1, v_3\}$

$$(TA)_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

צ"ע,  $A \in M_n(F)$   $T: V \rightarrow V$  הפיגורציה  $T$  של  $A$ .  
 $P_A(A) = 0$ ,  $P_T(T) = 0$

$$\det(XI - A) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots \\ & X - a_{22} & \dots \\ & & \ddots \end{vmatrix}$$

הצגה: (א)  $A \in M_n(F)$  הפיגורציה  $A$  הפיגורציה.

$$A^{-1} \in \text{Span}\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$$

(ב)  $A \in M_n(F)$  וזו,  $n \geq 2$  הרי

$$\text{Span}\{I, A, \dots, A^m\} \subset M_n(F) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

פולינום:  $P_m(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$  (א)  $P_m(A) = 0$

כל הפולינום האוליפטי. נקרא פולינום זה  $P_m$ .

$$P_m(A) = a_0 \cdot I + a_1 \cdot A + \dots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n = 0$$

אם  $a_0 \neq 0$ , אז נכפול את המשוואה ב- $A^{-1}$ .

$$a_0 A^{-1} + a_1 I + \dots + a_{n-1} A^{n-2} + A^{n-1} = 0$$

נעביר את  $a_0 A^{-1}$  לשני.

$$a_0 A^{-1} = -a_1 I - \dots - a_{n-1} A^{n-2} - A^{n-1}$$

אז  $a_0 \neq 0$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{a_0} (\dots) \in$$

$$\text{Span}\{I, A, \dots, A^{n-1}\} \rightarrow \text{כך}$$

$$0 = a_0 A^{-1} + a_1 I + \dots + a_{n-1} A^{n-2} + A^{n-1}$$

$$a_0 = 0 \text{ אז } A^{-1} \in \text{Span}\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$$

$$P_A(X) = a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n =$$

$$= X(a_1 + \dots + a_{n-1} X^{n-2} + X^{n-1})$$

אז  $0$  הוא שורש של  $P_A(X)$ , וזו,  $0$ .

כל  $A$ , ואז  $A$  הפיגורציה סגורה.

⊗  $\text{Span}\{I, A, \dots, A^m\} \subset \text{Span}\{I, \dots, A^{n-1}\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  בר וכו' (ד)  
 : וכו' גע

$$\dim \text{span} \{I, \dots, A^m\} \leq \dim \text{span} \{I, \dots, A^{n-1}\} = n$$

$n \geq 2 \quad \hookrightarrow \quad n < \dim M_n(F)$

לכיתות  $\otimes$  האלמנטים האלמנטים  $m$ . עבור  $n \leq m$ ,  
המבטאים הכרוכה. /נית  $n \geq m$ , ונית  $\otimes$  עבור

$m-1$ , נכנסים זמנך מ. ממלש פה - דמילן / P/c:

$$P_A(x) = a_0 + c_1x + \dots + x^n$$

$$0 = P_A(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n, \text{ gk}$$

כי  $A_{m-n}$  הוא  $(m \geq n)$  ,  $\omega_j$

$$0 = a_0 A^{m-n} + \dots + a_{n-1} A^{m-1} + A^m$$

אז נחיר אלקים ונקט:

$$A^m \in \text{Span}\{A^{m-n}, \dots, A^{m-1}\} \subseteq$$

$$\subseteq \text{Span}\{I, A, \dots, A^{m-1}\} \subseteq$$

$$\subseteq \text{span}\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$$

היום באמצעות.

משפט 1.1.  $M_2(F) \ni A$  הפיך אם ורק אם  $\det(A) \neq 0$ .

$$\det A = \frac{1}{2} ((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2))$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \text{tr}(A^3) = 0 \implies A \in M_3(F) \implies \text{rank}(A) \leq 2$$

1.  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$  A - 2 (100)

פסוק:

$$P_A(x) = x^2 - (\text{Tr}(A))x + \det A \quad \text{e p731' p/c (1c)}$$

20731 1/1c (1c)

$$0 = p_A(A) = A^2 - (\text{tr}(A)) \cdot A + \det A \cdot \overset{10 \cdot 10}{I_2} \overset{17}{N}$$

$\therefore \text{PCIND} \rightarrow 117N$   
 $T_9$

[illegible]

$$\text{tr} A \text{ unipotent} \rightarrow 0 = \text{tr}(A^2) - (\text{tr} A)^2 + 2 \det A$$

$$\det A = \frac{1}{2}((\text{tr} A)^2 - \text{tr}(A^2))$$

(ד) נכונות

$$(\pm) P_A(X) = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

$$a_2 = \pm \text{tr}(A) = 0$$

נכונות:

נכונות:

$$P_A = X^3 + a_1 X + a_0$$

$$A^3 = -a_1 A - a_0 I_3$$

נכונות פולינום

הערה:  $\text{tr}(A^3) = -a_1 \text{tr}(A) - a_0 \cdot 3$

$$0 = \text{tr}(A^3) = -a_1 \text{tr}(A) + a_0 \cdot 3 = 3a_0$$

↑  
מש

↓  
0

$$a_0 = 0$$

$$P_A(X) = X^3 + a_1 X$$

נכונות

$$P_A(X) = X^3 \quad \text{נכונות}, a_1 = 0 \quad \text{כך **}$$

↓  
נכונות

$$A^3 = 0, \quad \text{נכונות}$$

\*\* נכונות בשלילית  $a_1 \neq 0$ , נכונות פולינום

$$P_A(X) = X(X^2 + a_1) =$$

כך:

$$= X(X - \sqrt{-a_1})(X + \sqrt{-a_1})$$

יש  $A$  שונה לזו שניתן, נכונות,  $A$  נכונות.

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-a_1} \\ \sqrt{-a_1} & 0 \end{bmatrix}$$

נכונות  $A$  -