

תצבות: (ריבוי אלקטרי וריבוי גאומטרי)

יהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור ליניארי (V סוף מימדי n שדה F)
 נניח שהפולינום האופייני של T מגיעת לגורמים אינאליים n

$$P_T = (x - \lambda_1)^{r_1} \dots (x - \lambda_k)^{r_k} \quad F \text{ באלפן הסאם}$$

כאשר λ_i שונים זה מזה.

אל r_i נקרא הריבוי האלקטרי של הערך העצמי λ_i .
 כמובן, $\dim V_{\lambda_i} = r_i$ נקרא הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי λ_i .

משפט

(א) T ע"ע : ריבוי גאומטרי $\geq$ ריבוי אלקטרי

(ב) T אינסוף $\iff P_T$ מגיעת לגורמים אינאליים n F ,
 וזוהי ע"ע T , הריבוי הגאומטרי שווה לריבוי האלקטרי.

תרגיל: סממט $V = \mathbb{R}_2[x]$, (מבונן בסיסים B) $B = \{1, x, x^2\}$

נניח כי $T: V \rightarrow V$ מתמל $[T]_B^B = I_3$ $C = \{1, 1+x, x+x^2\}$

(א) האם T הפיכה?

(ב) האם T אינסוף?

פתרון: (א) מתקין נכח - $T(1) = 1$

$$T(x) = 1+x$$

$$T(x^2) = x+x^2$$

כלומר, T שולח אל איברי בסיס B אלברי בסיס C . ל

C איננה בסיס בסיס אבס $\mathbb{R}_2[x]$ (ישל אינאופז, סומה הפירה).

(ב) נא, T איננה, (הסבר: $[T]_B^B$ מתמל (x) :

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T אינסוף $\Rightarrow [T]_B^B$ איננה. $[T]_B^B$ איננה אינסוף:

$$P_T = (1-x)^3$$

באופן, חישובי המאטרי של T על V הוא 3. כלל,

$$\dim N(I - [T]_B) = \dim_{\mathbb{R}} \text{קernels} = 1$$

$$\Rightarrow \dim N \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 < 3$$

אכן, T הוא אופרטור.
 $\downarrow$
 חישובי
 קernels

(כך) $T: F^3 \rightarrow F^3$
 $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -z \\ 0 \end{pmatrix}$
 T הוא קernels

$F = \mathbb{R}$ (א)

$F = \mathbb{C}$ (ב)

המטרי E היא E המטריס המסובבים של F^3 . כלל, $(T)_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_T = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$$

(א) עבור $F = \mathbb{R}$, T הוא אופרטור, וכן T הוא אופרטור.

(ב) עבור $F = \mathbb{C}$, $P_T = (x-i)(x+i)$

ואכן T הוא אופרטור, המטריס המסובבים $= I$, וכן חישובי המאטרי T הוא קernels .
 (כ) $x^2 \geq 1$, $x^2 \leq 1$.

תתי-מרחב אינווריאנטים / מרחב סגור

תצפית - $T: V \rightarrow V$
 $W \subseteq V$
 W הוא מרחב T
 $T(W) \subseteq W$
 W הוא מרחב T
 $T(W) \subseteq W$

הערה - מתקיים $T|_W: W \rightarrow W$
 (א) $T|_W$ הוא אופרטור

בסיס אורתונורמלי

1. אם λ הוא ערך עצמי של T , λ הוא מרחב T
 $W \subseteq V$
 W הוא מרחב T

א. נורמליזציה.
 $W \subseteq V$
 W הוא מרחב T
 W הוא מרחב T

$$T\omega = \lambda\omega \in W$$

2. W הוא מרחב T , $Im T$, $Re T$, T הוא אופרטור.

3. יהי $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ תהליך הסיבוב θ סביב ציר z .

הבסיס $W_1 = \text{span}\{e_1, e_2\}$ הוא תת-בסיס

הבסיס $W_2 = \text{span}\{e_3\}$ הוא תת-בסיס

תרגיל - יהי V וקטוריות, $T: V \rightarrow V$ קומוטטור, $\omega \in V$

הבסיס T הוא

סגור - (הכלי T הוא סגור סגור, כלומר סגור)

$$T = \lambda \cdot Id_V, \lambda \in F$$

נתון וקטור v (ספרט) $v \in V$ וקטור v וקטור v

$$T(\text{span}\{v\}) \subseteq \text{span}\{v\}, \forall v \in V$$

כל $v \in V$ וקטור v וקטור v

$$T(v) = \lambda \cdot v$$

נתון $v_0 \neq 0$ וקטור v_0 וקטור v_0

$$T(v + v_0) = \lambda \cdot (v + v_0)$$

$$\uparrow$$

$$\lambda \cdot v + \lambda \cdot v_0$$

$$Tv + Tv_0$$

$$\parallel$$

$$\lambda \cdot v + \lambda \cdot v_0$$

כל v, v_0 וקטור v, v_0

כל v, v_0 וקטור v, v_0

$$v = c \cdot v_0$$

$$\lambda \cdot v = T(v) = T(c \cdot v_0)$$

$$\parallel$$

$$\lambda \cdot c \cdot v_0 = c \cdot T v_0 = c \cdot \lambda \cdot v_0$$

$$\lambda \cdot c = c \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda = \lambda$$

(כל $c \neq 0$ וקטור $c \neq 0$)

$$\lambda_v = \lambda_{v+v_0}$$

$$\lambda = \lambda_{v+v_0}$$

$$\lambda = \lambda_v$$

קרינה - נניח $T: V \rightarrow V$ אופרטור, $W \subseteq V$ תת-חלל T אינווריאנט. ראינו $T|_W: W \rightarrow W$ אופרטור על W .
 שאלה: האם $T|_W$ אופרטור על W ?

תשובה: כן! נוכיח.

נניח $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ערכים עצמיים של T . נניח $T - \lambda_i I$ אינו אופרטור על W .

$$V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i} \quad \text{על } V$$

ראינו, אם T אופרטור על W , אז $T - \lambda_i I$ אינו אופרטור על W .
 $V_{\lambda_i} \cap W$

* הנחתנו על $T|_W$ נכונה לכל λ_i :

$$\{\omega \in W \mid T|_W(\omega) = \lambda_i \omega\} = \{\omega \in W \mid T(\omega) = \lambda_i \omega\} = W \cap V_{\lambda_i}$$

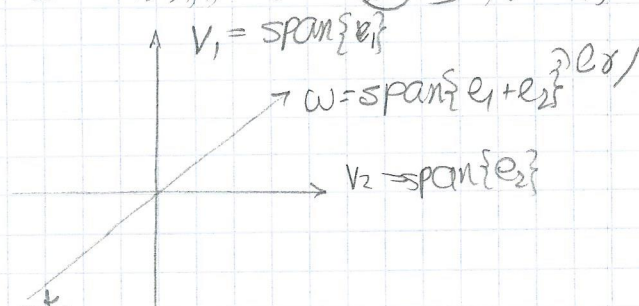
נניח $W = \sum_{i=1}^k W \cap V_{\lambda_i}$ (גורמים) - על W

נניח, נניח $T|_W$ אופרטור (אם לא) אז W אינו תת-חלל אינווריאנטי.

הנני אומר $\Leftrightarrow$ הנחתנו כי W תת-חלל אינווריאנטי של T .

וכן, $\bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i} = V$. הנחתנו $\geq$ הנחתנו. מכיוון $W \subseteq V$, אז $W = \bigoplus_{i=1}^k (W \cap V_{\lambda_i})$.

$$(V_1 \oplus V_2) \cap W = (V_1 \cap W) \oplus (V_2 \cap W)$$



ראינו, $\omega \in W$, כיוון W - $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$. נניח W אינו תת-חלל אינווריאנטי.

$$\omega = V_1 + V_2 + \dots + V_k \quad V_i \in V_{\lambda_i}$$

נניח $\omega = V_1 + \dots + V_k$ אופרטור T על W , אז $T\omega \in W$.

על W מתקיים $T\omega = \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_k V_k$, אז $\lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_k V_k \in W$.

$\circ m=1$ $W = V_{\lambda_1}$ אז $T|_W = \lambda_1 I$.

נניח $m=2$ נניח $W = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$ אז $T|_W = \lambda_1 I \oplus \lambda_2 I$.

ראינו, $\omega \in W$ כך $\omega = V_1 + \dots + V_m$ אז $T\omega \in W$.

אז $T\omega = \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_m V_m$, אז $\lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_m V_m \in W$.

$$W = V_1 + \dots + V_m$$

$$TW = \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_m V_m \in W$$

רש"ל

$$\lambda_m W = \lambda_m V_1 + \dots + \lambda_m V_m \in W$$

החסר לך השוויון השני מהקובץ:

$$\ominus TW - \lambda_m W \in W$$

$$\ominus (\lambda_1 - \lambda_m) V_1 + \dots + (\lambda_m - \lambda_m) V_m =$$

קובץ, וזכור כי W הוא תת-חלל, τ ו λ הם

$m-1$ חסמים שונים, $0 \neq \lambda_i$, $i=1, \dots, m-1$

$$1 \leq i \leq m-1 \quad (\lambda_i - \lambda_m) V_i \in W$$

כיון ש- $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$ (כל i), $V_i \in W$ $\forall 1 \leq i \leq m-1$

$$V_m \in W \leftarrow W = \underbrace{V_1}_{\in W} + \dots + \underbrace{V_{m-1}}_{\in W} + \underbrace{V_m}_{\in W}$$

קובץ, W הוא תת-חלל, $W \ni$

צורה

אם T הוא אופרטור רמיים, T הוא אופרטור רמיים "רמי"?

הסיבה היא שיש אופרטור רמיים רמיים?

אם כן: צורה.

אם כן: צורה: T הוא אופרטור רמיים $T: V \rightarrow V$

$$T_\lambda(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

אם כן: צורה: $T: V \rightarrow V$ הוא אופרטור רמיים $T: V \rightarrow V$

אם כן: צורה: $T: V \rightarrow V$ הוא אופרטור רמיים $T: V \rightarrow V$

אם כן: צורה: $T: V \rightarrow V$ הוא אופרטור רמיים $T: V \rightarrow V$

אם כן: צורה: $T: V \rightarrow V$ הוא אופרטור רמיים $T: V \rightarrow V$

הנחיות.

B^* הוא אופרטור רמיים.

נלשן זינגן מנסח - $A \in M_n(F)$ פא PA ע PA מנסח
 אגורמין זינגן F ע A זינגן מנסח זינגן (ינגן)
 ע PA זינגן מנסח זינגן

איך מנסח זינגן?

1. זינגן מנסח זינגן A זינגן מנסח זינגן A זינגן מנסח זינגן
 מנסח זינגן. 2. זינגן מנסח זינגן A זינגן מנסח זינגן

1-1

$$\dim(\ker(\lambda I - T)^k) - \dim(\ker(\lambda I - T)^{k-1})$$

מנסח זינגן A זינגן מנסח זינגן

$$\ker(T - \lambda I) \subsetneq \ker(T - \lambda I)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(T - \lambda I)^k \subsetneq \dots$$

* k זינגן מנסח זינגן, זינגן A