

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של אופרטור ליניארי:
יהי V מרחב וקטורי.

תהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור על (V) .

העצמה - סקלר $\lambda \in F$ נקרא ערך עצמי של T אם $\exists v \neq 0$ כך ש- $Tv = \lambda \cdot v$. מתקיים v נקרא וקטור עצמי של T ביחס לערך העצמי λ .

פונקציה העצמי של T בערך העצמי λ היא:

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \{v \in V \mid Tv = \lambda \cdot v\} = \\ &= V_\lambda = \{v \in V \mid Tv - \lambda \cdot v = 0\} = \\ &= \{v \in V \mid (T - \lambda \cdot \text{Id}) \cdot v = 0\} = \ker(T - \lambda \text{Id}) \end{aligned}$$

המרחב V_λ נקרא ה"א" של T בערך העצמי λ .
הערה - וקטור $v \in V$ (כנ"ל) נקרא עצמי אם $Tv \in \text{span}\{v\}$ ו- $v \neq 0$.

דוגמה: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 ערכים עצמיים - 1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ וקטור עצמי $\lambda=1$.
3 ערכים עצמיים - 1 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ וקטור עצמי $\lambda=1$.

פונקציה $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ וקטור עצמי.

דוגמה: $\text{Id}: V \rightarrow V$ $\lambda=1$ $V_\lambda = V$ $\lambda=1$ ערך עצמי יחיד.

תרגיל: $T: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ כ"כ

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1x + 2a_2x^2$$

מצא את כל הפולינומים $P(x)$ ופונקציות f כאלה ש- $T(P(x)) = \lambda P(x)$ $\lambda \in \mathbb{F}$

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \neq 0$$

$$T(P(x)) = \lambda \cdot P(x)$$

נחשב את המטריצה M של T ביחס לבסיס $\{1, x, x^2\}$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_0 + a_1x + 2a_2x^2 = \lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2)$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = \lambda a_0 \\ a_1 = \lambda a_1 \\ 2a_2 = \lambda a_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0(1-\lambda) + a_1 = 0 \\ a_1(1-\lambda) = 0 \\ a_2(2-\lambda) = 0 \end{cases}$$

אם $\lambda = 1$ או $\lambda = 2$ אז יש פולינומים לא טריוויאליים.

נמצא את הפולינומים עבור $\lambda = 1, 2$.

עבור $\lambda = 1$: $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1x + a_1 + 2a_2x^2$$

עבור $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

$$V_{\lambda=2} = \{a_2x^2 \mid a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$V_{\lambda=1} = \{a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\}$$

הבסיסות הן $\{1\}$ ו- $\{x^2\}$.

הערה - וקטורים עצמיים התיכונים לערכים העצמיים של T הם בסיס (הכלל של בסיסיות).

* אם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הם הערכים העצמיים של T , אזי הסכום

$$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \dots + V_{\lambda_n}$$

הוא סכומי.

הערה (אנטיגון): אם $T: V \rightarrow V$ נקרא אנטיגון, אם קיים בסיס B של V שלאיבריו הם וקטורים עצמיים של T . במקרה זה יוצא

$$[T]_B \leftarrow \text{מטריצה אלגנטית}$$

לעבור - T אנטיגון $\Leftrightarrow$ סכום המרחבים העצמיים שלו $V = V_{\lambda=1} + V_{\lambda=2} + \dots$

אנחנו נסתכל על T אנטיגון $T: \mathbb{R}^2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2[x]$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$$

אנחנו נסתכל על $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס חדש.

אנחנו נסתכל על:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

הערה - אם $T: V \rightarrow V$ ו- $\dim V = n$, אז T אנטיגון. הערה - במקרה זה הוסיטוסים של T הם בסיס אנטיגון.

$$Id: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

בנוסף על זה אנו רואים אנטיגון. נושאים נוספים נדון בהם בהמשך. יהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ איבר. $\lambda \in \mathbb{F}$ נקרא λ איבר עצמי אם קיים $v \neq 0, v \in \mathbb{F}^n$ כך ש-

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

מקרה זה v נקרא וקטור עצמי של A בערך העצמי λ .

המרחב העצמי של A בערך העצמי λ נקרא $N(A - \lambda I_n)$

$$\{v \in \mathbb{F}^n \mid A \cdot v = \lambda \cdot v\} = N(A - \lambda I_n)$$

אנו מסתכלים על A כמפת

$$T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$$

$$T_A(x) = A \cdot x$$

$N(A) = \{x \mid Ax = 0\} = \ker(T_A)$

הערה - נקרא A אנטיגון אם קיים בסיס של $\mathbb{F}^n$ של איברי עצמיים. A איבר עצמי של $\mathbb{F}^n$ הוא כזה ש-

16- תהי $T: V \rightarrow V$ ויהי B בסיס של V .

(א) λ ערך עצמי של T $\iff \lambda$ ערך עצמי של $[T]_B$.

(ב) V פולינום אפס של T $\iff \lambda$ פולינום אפס של $[T]_B$.

(ג) T אינסטרט $\iff [T]_B$ אינסטרט.

מציין $\left\{ \begin{array}{l} A, B \text{ ממוצעים} \\ P \text{ קיימת} \\ P+AP=B \end{array} \right\} \iff$

17- $A \in M_n(F)$ ויהי A אינסטרט אפס של P .
 סלקטורים. כלומר, A אינסטרט אפס של קיימת P אינסטרט אפס של P .
 $P \in M_n(F)$, $P \neq 0$, $P \cdot A \cdot P = 0$.

הוכחה- מכיוון שיש A אינסטרט אפס של P ,
 בסיס של F^n המורכב מוקטורים עצמיים של A .

אם $1 \leq i \leq n$, יהי v_i הערך העצמי של A ויהי v_i סלקטור.
 $A \cdot v_i = \lambda_i v_i$.
 נגד P ויהי $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ סלקטורים.
 $P = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{על } \mathbb{C}$$

השוויון הזה שקול לשוויון

$$A \cdot P = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix}$$

כלומר, $(Av_1 \dots Av_n)$ וזה שווה ל $(v_{11} \dots v_{n1})$.

הכיוון הפנימי, וניתן ל- A צורה אלכסונית
 ופ. P פסיכה כך ש $P^{-1} \cdot P \cdot A = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_n \end{pmatrix}$

$$AP = P \cdot \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_n \end{pmatrix} \text{ מתקיים:}$$

נסמן $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ בסיס P של V . כיוון P פסיכה,
 אלו וקטורים בסיס במרחב F^n .

$$A \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_n \end{pmatrix} \text{ מתקיים:}$$

$$(AV_1 \dots AV_n) = (C_1 V_1 \dots C_n V_n) \text{ כלומר,}$$

ישנה עמדה ונקרא $AV_i = C_i V_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$ כלומר,
 V_i (הוא וקטור) A של $\{V_1, \dots, V_n\}$ בסיס של F^n (המרחב)
 מקטרים עצמיים של A , משמע A -ארכסונית.

תרגיל - נתיב פתחית:

$$M_3(\mathbb{R}) \ni A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

נבדוק אם פתחית A , ואלו פתחיתים פתחיים פתחיים.
 נתון עמדה עצמי של a פתחית ארכסונית, ועמדה עצמי של a מכל
 ארכסונית P כך ש $P^{-1} \cdot A \cdot P$ אלכסונית. (P כיוון קביל "פתחית")

פתרון - נחשב ערך העצמי הפולינום האופייני

$$PA(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & a \\ 0 & 2-X & a \\ 1 & -1 & a-X \end{vmatrix}$$

מן הריאם שאם $a \neq 1, 2$, אז A יש 3 ערכים שונים.
 חס A ארכסונית. נתיב חלשים $a \neq 1, 2$ קביל/ארכסונית
 פתחיתים פתחיים.

$$V_{\lambda=1} = N(I-A) = N \begin{pmatrix} 0 & -1 & -a \\ 0 & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1-a \end{pmatrix} =$$

$$= \dots = \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1-2a \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{\lambda=2} = N(2I-A) = N \begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 0 & -a \\ -1 & 1 & 2-a \end{pmatrix} = \dots = \text{sp} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$