

מרחב צינאלי:

הגדרה - יהי V מ"ו מעל שדה F . סוקצונל אינארי על V נה

$$\varphi: V \rightarrow F \text{ } V\text{-}n \text{ של שדה } F.$$

אוסף כל הסוקצונלים האינאריים על V , נה במרחב הצינאלי, φ, ψ , וזממן $V^* = L(V, F)$.

צינאלי - 1. זל מרחב וקטורי V יל אגרופונקצור האינס:

$$\varphi: V \rightarrow F, \text{ כמחקר על } \varphi(V) = 0 \text{ זל } \forall v \in V.$$

2. על המרחב הוקטורי F^n , כל סוקצונל פולא מהצורה φ_a , $F^n \ni a$ נל/ל.

גצמרת - אם $F^n \ni a = (a_1, \dots, a_n)$, אזי φ_a מחחקר דיון

$$\varphi_a \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

3. על $\mathbb{R}^2$ יל סוקצונל $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2$

4. על מ"ו $M_n(F)$ יל סוקצונל trace $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ (כדן שנה סוקצונל אינארי).

5. במרחב $F[x]_{\leq n}$, יל סוקצונלים רצבה: זל $a \in F$, יל

$$F[x]_{\leq n} \ni P \mapsto P(a)$$

6. על $F[x]$ יל סוקצונל אינטגרל ביקס $[a, b]$, פמחקר

$$\varphi: P \mapsto \int_a^b P(t) dt$$

הבסס הצינאלי:

הגדרה - יהי V מ"ו מממד סופי n , ובסיס $(e_1, \dots, e_n)$

אזי הבסס הצינאלי $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, נהו בסס של V^* וזל

$$\varphi_i \left(\sum_{j=1}^n a_j e_j \right) = a_i \text{ } \varphi_i \text{ מוסקרים על-ידי הוקצמ:}$$

הערה: זל בסס V וקאים בסס צינאלי מלל. רצממל, $\mathbb{R}^3$

אם יוקצמל הבסס הסטנדרטי e_1, e_2, e_3 , אזי הבסס הצינאלי פמקאים

$$(e_1, e_2, e_3)$$

מרחב מאפס ומרחב אפסים:

$$\text{מרחב מאפס } S \subseteq V, \text{ נגזר, } S \subseteq V, \{ \varphi \in V^* \mid \varphi(v) = 0 \}_{v \in S} = S^\circ$$

$$T \subseteq V^*, \text{ נגזר,}$$

$$\text{מרחב אפסים } T \subseteq V^*, T^\circ = \{ v \in V \mid \varphi(v) = 0, \varphi \in T \}$$

$$(S^\circ)^\circ = \text{span } S, \text{ הרצף של מרחב, } S \subseteq V$$

$$\text{סגור - רצף, } S \subseteq (S^\circ)^\circ, \text{ וזה יראה ש } \text{span}(S) \subseteq (S^\circ)^\circ$$

$$(S^\circ)^\circ = \{ v \in V \mid \varphi(v) = 0 \}, \varphi \in S^\circ, \text{ יהי } S \subseteq S^\circ, \text{ האם}$$

$$\text{אם } \varphi \in S^\circ, \text{ מרחב, } \varphi(S) = 0, \text{ אז } \varphi \in (S^\circ)^\circ. \text{ האם}$$

$$\text{המרחב מאפס של } S \text{ הוא } S^\circ, \text{ כלומר } \text{span}(S) \subseteq (S^\circ)^\circ, \text{ נראה שזהו מרחב מאפס}$$

$$\dim(S^\circ)^\circ = \dim V - \dim(S^\circ) =$$

$$= \dim V - (\dim V - \dim S) = \dim S, \text{ נכונ}$$

$$(S^\circ)^\circ = S, \text{ אם } S \subseteq V, \text{ אז}$$

$$\text{במרחב מאפס (מרחב מאפס): } U \subseteq V, \text{ נגזר}$$

$$\text{אם } U^\circ \text{ (אם } U^\circ \text{ הוא מרחב מאפס של } U^\circ \text{). (אם)}$$

$$\text{המרחב מאפס של } U^\circ \text{ הוא } U, \text{ כלומר } U^\circ \subseteq U$$

$$\text{אם } U^\circ \subseteq U, \text{ אז } U^\circ = U, \text{ כלומר}$$

$$(U^\circ)^\circ = U, \text{ כלומר}$$

הכנסים בדוא"ר (המחירים).

המשפטים הנ"ל נובעים מהמשפטים הבאים:

אחלופס, נ"מ אהציר אל יש כי הסנקציות פליטתו פיתוח האק"ם

$$\begin{cases} i=j \\ i \neq j \end{cases} \quad \begin{aligned} & \text{כך } N \times N \text{ מטריצה, } \delta_{ij} \\ & \text{מכאן היא קרובה לזה } \delta_{ij} \end{aligned}$$

האילו של פונקציות זיקאי על F^n (F שדה), נוט מהצורה
המשולפת: $a = \{a_1, \dots, a_n\}$, נגזרת פונקציה:

$$\varphi_a : F^n \rightarrow F$$

$$\varphi_a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

כאילו של פונקציות זיגארי $\varphi: F^n \rightarrow F$ (בוא מפרסרה φ עמור
 $\alpha \in F^n$ מאמאם. למעשה, פסונקציה $\varphi \mapsto \alpha$ פאל איזומורפיזם
 $N - F^n$ ל- $(F^n)^*$. במילים אחרות, ניתן לזהרם על פונקציות זיגארי
 ב- F^n על וקטור מרחב.

סגרון מרמז: $\{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \}$ אף רמזים רצופים (ממא)

-ע פֿון $\mathbb{R}^3 \ni a_1, a_2, a_3$ פֿונקציען, וואס זענען נאך $B-1$

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}$ w/o n). $\varphi_1 = \varphi_{a_1}, \varphi_2 = \varphi_{a_2}, \varphi_3 = \varphi_{a_3}$

$$a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \quad | \text{NO}$$

$$a_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

$$a_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \varphi_1(v_1) = 1$$

כל אחד מהם יכול להפיק, נכון?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \quad , \text{וכן}$$

$$\varphi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4x_1 - 2x_2 - 2x_3$$

$$\varphi_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2x_1 + x_2 + x_3$$

תרגיל: נתון הסדרה $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$. עבור $a \in \mathbb{R}$

נמוך φ_a - $\varphi_a(P(X)) = P(a)$ וזו הפונקציה המוגדרת על

$\varphi_a \in V^*$. הריאן $a, b, c \in \mathbb{R}$ מספרים שונים

של $\{ \varphi_a, \varphi_b, \varphi_c \}$ בסיס של V^* .

פתרון: נשים לב $\dim \mathbb{R}_{\leq 2}[X] = \dim \mathbb{R}_{\leq 2}[X]^* = 3$, וכן , כיוון -

$\{ \varphi_a, \varphi_b, \varphi_c \}$ קבוצה בגודל 3 אינדיקטור , אכן נראה שפאקט'ם , לכן שיהיה בסיס.

נראה אינדיקטור - $\alpha_1 \varphi_a + \alpha_2 \varphi_b + \alpha_3 \varphi_c = 0 \leftarrow$ פאקט'ם

נשים לב $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. נקרא $1, X, X^2$ של V . נקרא: $0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c = 0$, $\alpha_1 a^2 + \alpha_2 b^2 + \alpha_3 c^2 = 0$. כמותים אחרות ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & b & c \\ & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אזכור: a, b, c שונים מספר , וכן המערכת

$$AX = 0$$

$$A^{-1} \cdot AX = A \cdot 0 = 0$$



$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

צדק נוספת איבריו - $\{ \varphi_a, \varphi_b, \varphi_c \}$ ע נאק V^* פארהאן א V^* .

כאמך, נאק $\text{Span} \{ \varphi_a, \varphi_b, \varphi_c \} = V^*$.

איצט צו זיין פארהאן $\dim W = \dim \text{Span} \{ \varphi_a, \varphi_b, \varphi_c \} = 3$.

$\dim W + \dim W_0 = \dim V = 3$ פארהאן. איצט $\dim W_0 = 0$.

כאמך, $\dim W = 3 - \dim W_0$ ע נאק.

פארהאן $P \iff 0 = \varphi_a(P) = \varphi_b(P) = \varphi_c(P)$, זיך, $P \in W_0$ יי.
 $P(a) \quad P(b) \quad P(c)$
 פארהאן $P \iff 0 \leq \deg P \leq 2$ פארהאן
 פארהאן $P \iff W_0 = 0$, פארהאן.

איצט - $V = \mathbb{R}[x]$ פארהאן, $V = \mathbb{R}[x]$ פארהאן, $V = \mathbb{R}[x]$ פארהאן.

$\alpha_i(P) = P^{(i)}(0)$ פארהאן, $0 \leq i \leq n$ פארהאן.

$B = \{ \alpha_0, \dots, \alpha_n \}$ פארהאן, V פארהאן.

B' פארהאן, B' פארהאן.

$\dim V = n+1$ פארהאן, B פארהאן.

B פארהאן, B פארהאן.

$(*) \lambda_0 \alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n = 0$ פארהאן.

$\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$0 \leq k \leq n$ $(**) (\lambda_0 \alpha_0 + \dots + \lambda_n \alpha_n)(x^k) = 0$ פארהאן.

$V \in \{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$ פארהאן, $(*)$ פארהאן.

$\alpha_i(x^k) = \begin{cases} k(k-1) \dots (k-i+1) x^{k-i} & i \leq k \\ 0 & i > k \end{cases}$ פארהאן.

$\alpha_i(x^k) = \begin{cases} 0 & k > i \\ k! & k = i \\ 0 & k < i \end{cases}$

$(\lambda_k \alpha_k)(x^k) = 0$ פארהאן, $(*) N, P$ פארהאן.

k פארהאן, $\lambda_k = 0 \iff \lambda_k k!$

$\{ \alpha_0, \dots, \alpha_n \}$ פארהאן.

נמצא בסיס B' של V כך $B - B'$ יהיה הבסיס הריאליזציה המלאה של V .

מה רוצים? P פולינום $P \in \mathbb{R}_{\leq n}[X] \ni P_0, \dots, P_n$

$$\alpha_i(x^j/j!) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{j!}{j!} = 1 & i = j \end{cases}, \text{ כך, } \alpha_i(x^j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ i! & i = j \end{cases}$$

כאומר, הבסיס $\{1, x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{6} \dots \frac{x^n}{n!}\}$ בסיס של V .

הוא בסיס כמעט.

הריאליזציה:

אנחנו מ' כולנו V , הפעולה מ' חדש V^* . V^* הוא מ' - עכנו נניח

סדרה מ' המרחב הוואט שלו, כאומר, מ' המרחב $(V^*)^*$.

מרחב מ' נקרא "הוואט של" V ונסמך בקיצור V^{**} .

משפט חשוב: $V \cong V^{**}$ "הוא קנוני".

אנחנו מוגדר הוואט $c: V \rightarrow V^{**}$. הוא מוגדר כך: אם

$$c(x)(\varphi) = \varphi(x) \quad x \in V$$

$$V^{**} = \{\varphi: V^* \rightarrow F\} \rightarrow \text{פונקציות סקלריות.}$$

בדוגמה - נחזור למיטאביה הבאה: $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

נסמך מ' φ . האילו $B = \{\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c\}$ בסיס של V^* . (מכאן א

הבסיס B^* של V^{**} , המלאה $B - B^*$.