

$$\left[\frac{A_k}{k} \right] = A_{n \times n} \quad \det A_k = \Delta_k$$

סלוקה: $C_{n \times n}$ - מטריצה נכונה

$$k \neq n \text{ בל} \iff \text{יש } C \text{ של } [e] \text{ ו-} [e'] \text{ ב-} [e] \text{ ו-} [e'] \text{ ב-} [e]$$

$$\text{span}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{span}\{e'_1, \dots, e'_k\}$$

משפט (יחידות) - יהי $b(x_1, \dots, x_n)$ גורם יסודי מדרג r . כל

הצורה $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_r y_r^2$ סגורה במטריצה

משולשית, $\Delta_1, \dots, \Delta_r \neq 0 \iff$ יש B כך ש-

$$\Delta_0 = 1, \quad k=1, \dots, r \quad \lambda_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \quad \text{הצורה פשוטה.}$$

הוכחה: $\leftarrow$, הוכחה.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$b_{11} = \Delta_1 \neq 0$$

$$b = b_{11}x_1^2 + \dots$$

$$B' = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - \frac{b_{12}}{b_{11}} x_2 - \dots - \frac{b_{1n}}{b_{11}} x_n \\ x'_2 = x_2 \\ \vdots \\ x'_n = x_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & \dots & -\frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$b(x'_1, \dots, x'_n) = b_{11}x_1'^2 + \dots + \tilde{b}(x'_2, \dots, x'_n)$$

$$B' = C^t \cdot B \cdot C \quad \rightarrow \quad B_k = C_k^t B_k C_k$$

$$\det B'_K = \underbrace{(\det C_K)^2}_{=1} \underbrace{\det B_K^{-2}}_{=\Delta_K} = \Delta_K$$

$$\det B'_K = b_{11} \cdot \delta_{K-1}$$

$$\delta_{K-1} = \frac{\det B'_K}{b_{11}} \neq 0, K = 1, \dots, r$$

$$\begin{cases} \delta_1 \neq 0 \\ \delta_2 \neq 0 \\ \vdots \\ \delta_r \neq 0 \end{cases}$$

$$r|K \tilde{b} = r-1 \rightarrow$$

לכן, $\tilde{b}$ נ"ח N וכל הפונקציות
על N שוות.

לפי הנתון האחרון, נ"ח N מהסתם N וכל N שוות.

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C'_{n-1 \times n-1} \begin{pmatrix} x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

כך נבחר את N וכל N שוות.

$$\tilde{b}(y_2, \dots, y_n) = \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2$$

$$b(x_1', y_2, \dots, y_n) = b_{11} x_1'^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & C'_{n-1 \times n-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix} \cdot C \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

↑
הסתם N

הסתם N

$$* \quad b = \lambda_1 x_1'^2 + \dots + \lambda_r x_r'^2 \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$$

לפי F -על F שוות.

$$\begin{cases} x_1' = \sqrt{\lambda_1} x_1 \\ x_r' = \sqrt{\lambda_r} x_r \\ x_{r+1}' = x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n' = x_n \end{cases} \quad x^2 - \lambda = 0$$

$$\underline{b} = x_1'^2 + \dots + x_r'^2$$

b היא פונקציה שוות על N

$$r \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

הצגה - של מטריצות סימטריות B, B' נמצאות חופפות
 כל קיימת מטריצה הפיכה C כך $B' = C^t B C$, $B' \sim B$

(סימטריות)

אלוף - (1) $B \sim B$

(סימטריות)

(2) $B \sim B' \leftarrow B' \sim B$

(סימטריות)

(3) $B'' \sim B \leftarrow B'' \sim B', B' \sim B$

הכח - (1) $B = I_n^t B \cdot I_n$

(2) $B = (C^{-1})^t B' C^{-1} \leftarrow B' = C^t B C$

(3) $B'' = K^t B' K \in \leftarrow B' = C^t B C$

$\in K^t C^t B C K = (CK)^t B (CK)$

$\mathbb{R}^n$

משפט - יהיו B, B' של מטריצות סימטריות מאתה בן חופפות

$\leftrightarrow \text{rk } B = \text{rk } B' \leftarrow$ חלקם של F יהיה סגור אלטרנטי!

$\leftarrow$, $B' = C^t B C \leftarrow \text{rk } B = \text{rk } B'$

$\rightarrow$, $r = \text{rk } B = \text{rk } B'$, / וכו' כי

$B \sim \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \sim B' \rightarrow B \sim B'$

מרחב הווקאלי $\mathbb{F}^n$ כינוי

$b(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} \underbrace{b_{ij}}_B x_i x_j$

המטריצה B סטנס המטריצה של B . קיימת

הכל שבו המטריצה של B הוא בדרך נורמל

$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \sim B = C^t B C$
 $\mathbb{R}^n$

$$b(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1, \dots, \lambda_p > 0 \\ \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_r < 0 \end{cases}$$

$$r = rk(b)$$

$$b(y_1, \dots, y_n) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - \underbrace{y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2}_q$$

p - אינצקס אונרציה חיובי של b.

q - אינצקס אונרציה שלילי של b.

משפט - אינצקסי האונרציה החיוביים והשליליים של גלוי

הבסיס הנורמלי.

הוכחה - סכום אינצקסי האונרציה שווה ל- r , אכן, לא

גלוי הבסיס. אכן, מספיק להוכיח שאינצקס האונרציה החיובי

ואגלוי הבסיס הנורמלי.

נניח $[e'], [e]$ של בסיסים נורמליים.

$$[e'] \quad b = z_1^2 + \dots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots - z_r^2$$

$$[e] \quad b = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$$

$p > s$ אזי, $p \neq s$ נניח כעת $p = s$: β

$$M_1 = \text{span} \{e_1, \dots, e_p\}$$

$$M_2 = \text{span} \{e_{s+1}', \dots, e_n'\}$$

$$\dim M_1 + \dim M_2 = p + n - s \underset{p > s}{>} n$$

$$0 \neq v \in M_1 \cap M_2 \neq \{0\}, \quad p, r$$

$$b(v) \stackrel{[e]}{=} v_1^2 + \dots + v_p^2 > 0$$

$$v \in M_1 \rightarrow v = v_1 e_1 + \dots + v_p e_p$$

$$v \in M_2 \rightarrow v = v_{s+1}' e_{s+1}' + \dots + v_n' e_n'$$

$$b(v) \stackrel{[e']}{=} -v_{s+1}'^2 - \dots - v_r'^2 \leq 0$$

אזי $p = s$

$p = s, \quad p, r$