שיעור 15

שיטת Lagrange ללכסון תבניות ריבועיות

$$b(x)=\sum_{b=1}^{n} b_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j} b_{ij}x_ix_j$$

מקרה ראשון:

נניח ש $b_{11}\neq 0$

$$b(x)=b_{11}x_1^2+2\sum_{j=2}^{n} b_{1j}x_1x_j+$$
$$+\sum_{i=2}^{n} b_{ii}x_i^2+2\sum_{2\le i<j\le n} b_{ij}x_ix_j=$$

$$=b_{11}\Big(\underbrace{x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j}_{x_1'=}\Big)^2-\frac{1}{b_{11}}\Big(\sum_{j=2}^{n} b_{1j}x_j\Big)^2+\sum_{i=2}^{n} b_{ii}x_i^2+$$
$$+2\sum_{2\le i<j\le n} x_ix_j =$$

$$\begin{cases} x_1'=x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}\cdot x_j \\ x_2'=x_2 \\ \vdots \\ x_n'=x_n \end{cases}$$

$$= b_{11}(x_1')^2-\frac{1}{b_{11}}\Big(\sum_{j=2}^{n} b_{1j}x_j'\Big)^2+\sum_{i=2}^{n} b_{ii}x_i'^2+$$
$$+2\sum_{2\le i<j\le n} b_{ij}x_i'x_j' \longrightarrow$$

הנוסחה החדשה אינה תלויה ב- x_1'.

מקרה שני:

$b_{11}=0$, אבל קיים i_0 כך ש $b_{i_0i_0}\neq 0$

נעשה תמורה של $x_1,\dots,x_n$ כך ש- $b_{11}'\neq 0$. $x_1\longleftrightarrow x_{i_0}$,

נחזור למקרה 1.

מקרה 3:

נניח $b_{ii}=0$ $\forall i$, אם $b_{ij}=0 \Rightarrow b\equiv 0$, אין מה ללכסן.

נניח שקיים $b_{ij}\neq 0$, $i\neq j$, נעשה תמורות למשתנים

ונניח $b_{12}\neq 0$,

$$b(X) = 2b_{12}x_1x_2 + 2\sum_{j=3}^{n} b_{ij}x_ix_j + 2\sum_{j=3}^{n} b_{2j}x_2x_j +$$

$$+ 2\sum_{3\le i<j\le n} b_{ij}x_ix_j =$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1' - x_2' \\ x_2 = x_1' + x_2' \\ x_3 = x_3' \\ \vdots \\ x_n = x_n' \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1+x_2}{2} \\ x_2' = \dfrac{x_2-x_1}{2} \end{cases}$$

$$= 2b_{12}(x_1'-x_2')(x_1'+x_2') + 2\sum_{j=3}^{n} b_{ij}(x_1'-x_2')\cdot x_j' +$$

$$+ 2\sum_{j=3}^{n} b_{2j}(x_1'+x_2')\cdot x_j' + 2\sum_{3\le i<j\le n} b_{ij}x_i'x_j' =$$

חוזרים
למקרה 1

$$= 2b_{12}x_1' + \dots$$

$$b_{12} \neq 0$$

דוגמא -

$$b(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 =$$

$$= x_1^2 + 2x_1(2x_2+x_3) + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 =$$

$$= \underbrace{(x_1+2x_2+x_3)}_{x_1'}{}^2 - (2x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 =$$

$$= (x_1')^2 - 4(x_2')^2 - 4(x_2'x_3')^2 - (x_3')^2 + (x_2')^2 + 3(x_3')^2 +$$

$$+ 2x_2'x_3' = (x_1')^2 - 3(x_2')^2 + 2(x_3')^2 - 2(x_2'x_3')^2 =$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases}}$$

$$= (x_1')^2 - 3\left((x_2')^2 + \frac{2}{3}x_2'x_3'\right) + 2(x_3')^2 =$$

$$= (x_1')^2 - 3\left(x_2' - x_3'/3\right)^2 + \frac{3(x_3')^2}{9} + 2(x_3')^2 =$$

$$= (x_1')^2 - 3\left(x_2' + x_3'/3\right)^2 + 7/3\,(x_3')^2 =$$

$$= (x'')^2 - 3(x_2'')^2 + 7/3\,(x_3'')^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' \\ x_2'' = x_2' + \frac{x_3'}{3} \\ x_3'' = x_3' \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longleftarrow$$ מטריצת התבנית הריבועית ביחס לבסיס הסטנדרטי.

$$B = C^t \cdot D \cdot C$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1' - 2x_2' - x_3' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases} \longleftarrow \begin{cases} x_1' = x_1'' \\ x_2' = x_2'' - \frac{x_3''}{3} \\ x_3' = x_3'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1'' - 2\left(x_2'' - \frac{x_3''}{3}\right) - x_3'' = x_1'' - 2x_2'' - \frac{x_3''}{3} \\ x_2 = x_2'' - \frac{x_3''}{3} \\ x_3 = x_3'' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \cdot \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}$$

טענה: מטריצה C היא משולשת עליונה והפיכה $\longleftrightarrow$ C היא מטריצה מעבר מבסיס $[e]$ ל-$[e']$, רק אם לכל $1 \le k \le n$,

$$\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_k\} = \mathrm{span}\{e_1', \ldots, e_k'\}$$

הוכחה: $\Longleftarrow$: $C = \begin{pmatrix} c_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix}$ נתון בסיס $[e]$.

נגדיר סדרת וקטורים חדשה: $[e'] = [e] \cdot C$

$[e']$ גם בסיס, כי C הפיכה.

$$e_l' = \sum_{p=1} c_{pl} e_p = \sum_{p=1}^{l} c_{pl} e_p \quad \leftarrow \forall l$$

$$e_l' \in \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_l\}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\mathrm{span}\{e_1', \ldots, e_l'\}}_{\text{מ"מ}} \subseteq \underbrace{\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_l\}}_{\text{מ"מ}}$$

$\leftarrow$ מ"מ. בגלל שוויון המימד.

ולכן, $\forall k$ $span\{e_1,\dots,e_k\} = span\{e'_1,\dots,e'_k\}$

$\Longrightarrow$: $[e],[e']$ שני בסיסים, $span\{e_1,\dots,e_k\}$ = $span\{e'_1,\dots,e'_k\}$

$\forall k$, $[e']=[e]\cdot C$

$$span\{e_1,\dots,e_l\} \ni e'_l = \sum_{p=1}^{l} c_{pl}\, e_p$$

$p>l$, $c_{pl}=0$ $\longleftarrow$ C משולשת עליונה. מש"ל.

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{B_k} & \\ & \end{pmatrix}_{n\times n}$$

מינור מסדר $k\times k$, נקרא B_k

טענה: תהי C מטריצה משולשת עליונה שהיא מטריצת מעבר מבסיס $[e]$ לבסיס $[e']$. יהיו B, B' מטריצות של תבנית ריבועית b בבסיסים $[e], [e']$. אזי לכל $1\le k\le n$, $B'_k=(C_k)^t\cdot B_k\cdot C_k$

הוכחה: נצמצם את b אל $span\{e_1,\dots,e_k\}$

$\longrightarrow$ מהטענה הקודמת $=$ $span\{e'_1,\dots,e'_k\}=L$

מטריצת מעבר מ $(e_1,\dots,e_k)$ ל-$(e'_1,\dots,e'_k)$ היא C_k.

המטריצה של $b|_L$ ב-$(e_1,\dots,e_k)$ שווה ל-B_k.

המטריצה של $b|_L$ ב-$(e'_1,\dots,e'_k)$ שווה ל-B'_k.

$$B'_k = C_k^t\cdot B_k\cdot C_k$$

$A\to A_k$

$\det A_k=\Delta_k$

$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ - משולשת יחידה

משפט (יעקובי): תהי $b(x_1,\dots,x_n)$ תבנית ריבועית מדרגה r. אזי ניתן להביא את b לצורה אלכסונית:

$$\lambda_1 y_1^2+\dots+\lambda_k y_k^2$$

קיימת מטריצה משולשת יחידה $\longleftrightarrow$ $\Delta_1 \neq 0, .., \Delta_r \neq 0$

ובמקרה הזה. $\lambda_1 = \Delta_1 \,,\, \lambda_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} \,,\, \dots, \lambda_r = \dfrac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}$

משום ש - $rk\, b = r$ $\longleftarrow$ $\lambda_1, .., \lambda_r \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$\forall_{1 \le k \le r} \quad \Delta_k \neq 0$$

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} = \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_{k-1} \lambda_k}{\lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}} = \lambda_k$$