שיעור 14

תזכורת מהשיעור הקודם:

$$\xi : V \times V \to F$$

$$B_\xi = (\underbrace{\xi(e_i, e_j)}_{b_{ij}})_{n \times n}$$

$$\xi(x,y) = \sum_{j,i=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$$

$$[e] \xrightarrow{C} [e']$$

$$B'_\xi = C^t B_\xi C \longrightarrow rk\, \xi = rk\, B_\xi$$

$$\ker^l(\xi) = \{x \in V \mid \xi(x,y) = 0 \quad \forall y \in V\}$$

$$\ker^r(\xi) = \{x \in V \mid \xi(y,x) = 0 \quad \forall y \in V\}$$

משפט - $\dim \ker^l(\xi) = \dim \ker^r(\xi) = n - rk(\xi)$

$$n = \dim V$$

הוכחה - נוכיח $\dim \ker^r(\xi) = n - rk\, \xi$. יהי $e_1, \dots, e_n$ בסיס כלשהו ב-V.

$$\ker^r(\xi) = \{x \mid \xi(y,x) = 0 \quad \forall y \in V\} = \{x \mid \xi(e_i, x) = 0 \quad \forall e_i\} =$$

$$= \{x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \mid \xi(e_i, \sum_j x_j e_j) = 0 \quad \forall i\} = \{x \mid \sum_j \xi(e_i, e_j) x_j = 0 \ \forall i\} =$$

$$= \{x \mid \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n\} = \{x \mid B_\xi^{[e]} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0\}$$

לכן, $\dim \ker^r(\xi) = n - rk\, B_\xi^{[e]} = n - rk(\xi)$. ■

הערה - אם ξ סימטרי, או אנטי סימטרי, אזי גרעין שמאלי = גרעין ימני.

הגדרה - $\xi \in T_2(V)$. ξ נקרא לא מנוון אם $rk(\xi) = n \Leftrightarrow$ $\ker^l(\xi) = \ker^r(\xi) = \{\theta\}$.

$\hat{\xi}^l, \hat{\xi}^r : V \longrightarrow V^*$ $\qquad v \in V$

$(\hat{\xi}^l(v))(x) = \xi(v,x) \qquad \forall x \in V$

$(\hat{\xi}^r(v))(x) = \xi(x,v) \qquad \forall x \in V$

למה: $\hat{\xi}^l, \hat{\xi}^r$ הן ט"ל.

הוכחה: נוכיח, $\hat{\xi}^l(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \hat{\xi}^l(v_1) + \lambda_2 \hat{\xi}^l(v_2)$

* שיוויון של פונקציונלים לינאריים על V. כלומר, יש להם אותם ערכים על וקטור כלשהו. מניסות אחר:

$(\hat{\xi}^l(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2))(x) = (\lambda_1 \hat{\xi}^l(v) + \lambda_2 \hat{\xi}^l(v))(x)$

$\xi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, x) \qquad \lambda_1 (\hat{\xi}^l(v))(x) + \lambda_2 (\hat{\xi}^l(v))(x) =$

$= \lambda_1 \xi(v_1, x) + \lambda_2 \xi(v_2, x)$

השיוויון מתקיים. ■ הוכחה זהה עבור $\hat{\xi}^r$

הערה - $\ker(\hat{\xi}^l) = \ker^l(\xi)$

$\ker(\hat{\xi}^r) = \ker^r(\xi)$

שיוויון של פונקציונלים מולטי-לינאריים לא מנוונים:

טענה: יהי $\xi \in T_2(V)$. הטענות הבאות שקולות:

(1) ξ לא מנוון.

(2) $\hat{\xi}^l$ איזומורפיזם.

(3) $\hat{\xi}^r$ איזומורפיזם.

הוכחה: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$: $rk(\xi) = n$.

$\hat{\xi}^l : V \to V^*$, העתקה בין מרחבים מאותו מימד: $\dim V = \dim V^*$

מספיק להוכיח ש- $\hat{\xi}^l$ חח"ע $\longleftrightarrow \ker \hat{\xi}^r = \ker \hat{\xi}^l = \{0\}$

$\dim \ker(\xi) = n - rk\,\xi = 0$

$\ker^l(\xi) = 0 \longrightarrow$ $\hat{\xi}^l$ איזומורפיזם

$\dim\ker\hat{\xi}^{l} = \dim\ker^{l}(\xi) = \dim\ker^{r}(\xi)$: $\underline{3 \leftarrow 2}$

$= \dim\ker\hat{\xi}^{r}$ $\longrightarrow \ker\hat{\xi}^{r} = \{\theta\}$

$\downarrow$

$\hat{\xi}^{r}$ איזומורפיזם.

$0 = \dim\ker\hat{\xi}^{r} = \dim\ker^{r}(\xi) = n - rk(\xi)$: $\underline{1 \leftarrow 3}$

$\downarrow$

$rk(\xi) = n$

$\downarrow$

ξ לא מנוון.

$\blacksquare$

משפט - יהי ξ פונקציונל בילינארי לא מנוון. אזי לכל $f \in V^*$, קיים ויחיד $a \in V$ כך ש $f(x) = \xi(a,x)$ לכל $x \in V$.

$\longleftrightarrow$ $f = \hat{\xi}^{l}(a)$

הוכחה - שקול להגיע שקיים ויחיד a כך ש $f = \hat{\xi}^{l}(a)$.

$f \in V^*$ $\quad \hat{\xi}^{l} : V \to V^*$ $\leftarrow$ איזומורפיזם, משום ש-ξ לא מנוון.

$\hat{\xi}^{l}$ - על. לכן, קיים $a \in V$ כך ש $f = \hat{\xi}^{l}(a)$.

$\hat{\xi}^{l}$ - חח"ע. לכן a הוא יחיד. $\blacksquare$

תבנית ריבועית:

הגדרה - פונקציה $b : V \to F$ הינה תבנית ריבועית אם קיים $\xi \in T_2(V)$ כך ש- $\forall x \in V$ $b(x) = \xi(x,x)$. $b(\lambda x) = \lambda^2(b(x))$ (לא לינ׳)

דוגמא - $V = F^n$

$$b(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\xi(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$$

טענה - תהי b תבנית ריבועית. אזי קיים פונקציונל בילינארי סימטרי יחיד כך ש $b(x) = \xi(x,x)$, לכל $x \in V$.

הוכחה - * יחידות: $b(x)=\xi(x,x)$, ξ-סימטרי.

$$b(x+y)=\xi(x+y,x+y)=\cancel{\xi(x,x)+\xi(y,y)}=$$

$$=\underbrace{\xi(x,y)+\xi(y,x)}_{\text{שווים, מסימטריה.}}+\xi(x,x)+\xi(y,y)=$$

$$=\xi(x,x)+\xi(y,y)+2\xi(x,y)=b(x)+b(y)+2\xi(x,y)$$

$$\xi(x,y)=\frac{1}{2}\left(b(x+y)-b(x)-b(y)\right)\Leftarrow \xi \text{ יחיד.}$$

* קיום: $b(x)=\xi'(x,x)$. ξ' לאו דווקא סימטרי.

define: $\xi(x,y)=\frac{1}{2}\left(\xi'(x,y)+\xi'(y,x)\right)$

$$\xi(x,x)=\frac{1}{2}\left(\xi'(x,x)+\xi'(x,x)\right)=b(x).$$

☑

הגדרה- בהינתן תבנית ריבועית b, הפונקציונל הבילינארי הסימטרי ξ שמקיים $b(x)=\xi(x,x)$ נקרא הפולריזציה של b.

סימון: ξ_b.

$$\left\{\begin{matrix}\text{תבניות}\\ \text{ריבועיות}\\ \text{על } V\end{matrix}\right\}\longleftrightarrow T_2^{sym}(V)$$

$$b\leftrightarrow\xi_b\to B^{[e]}_{\xi_b}=B^{[e]}_b$$

$$rk(b):=rk(\xi_b)$$

$[e]$- בסיס של V.

$B^{[e]}_b=[b_{ij}]$, נקרא מטריצה סימטרית של b.

דרכים לכתוב את b

$$b(x)=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n} b_{ij}x_ix_j$$

$$b(x)=[x_1,\dots,x_n]\cdot B_b\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

הגדרה - יהי $\xi \in T_2(V)$. יהי $L \subset V$ תת״מ וקטורי.

$$L^{\perp\xi} = \{x \in V \mid \xi(x,y) = 0 \quad \forall y \in L\}$$

קל לראות $L^{\perp\xi} \subset V$, תת-מרחב וקטורי.

$L^{\perp\xi}$ - נקרא משלים אורתוגונלי של L ביחס ל-ξ.

טענה - מימד המשלים: $\dim L^{\perp\xi} \geq n - \dim L$

$$n = \dim V$$

הוכחה - נגדיר ט״ל $F: V \to L^*$ ע״י $v \in V$:

$$(F(v))(y) = \xi(v,y) \quad , \forall y \in L$$

נקבל שזו אכן ט״ל. (תרגיל)

$$\ker F = \{x \in V \mid \xi(x,y) = 0 \ \forall y \in L\} = L^{\perp\xi}$$

$$\dim L^{\perp\xi} = \dim \ker F = n - \underbrace{\dim \operatorname{Im} F}_{\leq \dim L} \geq n - \dim L$$

$\blacksquare$

טענה - $\xi \in T_2^{sym}(V)$, $L \subset V$ תת״מ וקטורי. נניח שהצמצום של ξ ל-L אינו מנוון, אזי $\boxed{V = L \oplus L^{\perp\xi}}$

הוכחה - נרצה להראות שהסכום ישר, כלומר $L \cap L^{\perp\xi} = \{\theta\}$

נקח $x \in L \cap L^{\perp\xi}$. מכאן ש $x \in L^{\perp\xi}$, אזי $\forall y \in L \ \xi(x,y) = 0$.

אבל, $x \in L$, לכן, $x \in \ker^{\ell}(\xi|_L)$, וגם $x \in \ker^{r}(\xi|_L)$.

ידוע שהצמצום לא מנוון, לכן, $x = \{\theta\}$.

* ~~נניח~~ $L \oplus L^{\perp\xi} \overset{?}{=} V$

$$\dim(L \oplus L^{\perp\xi}) = \dim L + \dim L^{\perp\xi} \geq \dim L + (n - \dim L) = n$$

$$\Downarrow$$

$$L \oplus L^{\perp\xi} = V \qquad \blacksquare$$

הגדרה - יהי $\xi \in T_2^{sym}(V)$. בסיס $e_1, \dots, e_n$ נקרא ״בסיס מרכזי״ של ξ אם

$$B_\xi^{[e]} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

משפט - לכל $\xi \in T_2^{sym}(V)$ (פונקציות בילינאריות סימטריות), קיים בסיס מלכסן.

הוכחה - נראה באינדוקציה ב- n ($=\dim V$).

אם $n=1$, אין מה להוכיח.

$n-1 \to n$: אם $\xi=0$ - אין מה להוכיח.

נניח ש- $\xi\neq 0$, נוכיח שקיים וקטור e_1 כך ש- $\xi(e_1,e_1)\neq 0$. קיימים $x,y\in V$ כך ש- $\xi(x,y)\neq 0$.

אם $\xi(x,x)\neq 0$ $\Rightarrow$ $e_1=x$.

אם $\xi(y,y)\neq 0$ $\Rightarrow$ $e_1=y$.

- מה קורה אם שניהם מתאפסים?

- נניח $\xi(x,x)=\xi(y,y)=0$ $\Rightarrow$ $e_1=x+y$

$$\xi(e_1,e_1)=\xi(x+y,x+y)=\underbrace{\cancel{\xi(x,x)}}_{=0}+\underbrace{\cancel{\xi(y,y)}}_{=0}+\xi(x,y)+\xi(y,x)=$$
$$2\xi(x,y)\neq 0$$

$L:=\mathrm{span}\{e_1\}$. $\xi|_L$ לא מנוון, כי $\xi(e_1,e_1)\neq 0$, ולכן $V=L\oplus L^{\perp\xi}$

נפעיל את הנחת האינדוקציה, קיים בסיס $e_2,\dots,e_n$ של $L^{\perp\xi}$ כך ש-

$$\left(\xi(e_i,e_j)\right)_{i,j=2}^{n}=\begin{bmatrix}\lambda_2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$e_1,\dots,e_n$ בסיס של V.

$$\left(\xi(e_i,e_j)\right)_{i,j=1}^{n}=\left[\begin{array}{c|ccc}\xi(e_1,e_1) & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & \lambda_2 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n\end{array}\right]$$

$\blacksquare$