

משפט היסודי של ג'ורדן

יהי $T: V \rightarrow V$, V וקטור ספייס $\mathbb{C}$ על $\mathbb{C}$.
 $P_T(T) = 0$.
 אז T ניתן לפרק לגורמים F על $\mathbb{C}$.

הפרק F (על $\mathbb{C}$)

הוא בגורמים ג'ורדן

$$[T] = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_s}(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

$$P_T(\lambda) = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1 - \lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_s}(\lambda_s - \lambda) \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^s (\lambda_j - \lambda)^{k_j}$$

$$P_T(T) = \prod_{j=1}^s (\lambda_j \cdot I_d - T)^{k_j} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\prod_{j=1}^s (\lambda_j I - J_{k_i}(\lambda_i))^{k_j} \stackrel{?}{=} 0 \quad : i \text{ בכל אחד מהגורמים}$$

$$0 \stackrel{?}{=} \prod_{i=1}^s (\lambda_i \cdot I - J_{k_i}(\lambda_i))^{k_i} \cdot \prod_{i \neq j} (\lambda_j I - J_{k_i}(\lambda_i))^{k_j}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{bmatrix}$$

$$P(A) = \begin{bmatrix} P(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(A_s) \end{bmatrix}$$

-2-

$$-\lambda_i \cdot I + f_{k_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}_{k_i \times k_i}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}_{k_i \times k_i}^{k_i} = 0$$

לע"נ

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \quad A_{n \times n}$$

הפונקציה $P_A(\lambda)$ היא פולינום בעל מקדמים ב F , $A \in M_{n \times n}(F)$.
 $P_A(A) = 0$ (לפי

המשפט) : הפונקציה $\varphi_A : F^n \rightarrow F^n$ יוצרת
 $\varphi_A(x) = A \cdot x$

הפונקציה φ_A היא מניסיה הפונקציה $A - I$.
 $P_A(\lambda) = P_{\varphi_A}(\lambda)$. לפי ההגדרה $P_{\varphi_A}(\lambda) = 0$, $P_A(\varphi_A) = 0$,
 $0_{n \times n} = [P_A(\varphi_A)] = P_A(A)$, במניסיה הפונקציה

לע"נ

||
0

המשפט 2 (↓) : נניח M היא V -מניסיה A הפונקציה T ,
 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, לפי הפונקציה $P_T(A) = P_A(A) = 0$
 $M_{n \times n}(\mathbb{C})$

$$P_T(A) = P_A(A) = 0$$



$$P_T(T) = 0 \leftarrow [P_T(T)] = P_T(A)$$

לע"נ

המשפט 2 : יהי $T : V \rightarrow V$ מניסיה T .
 $P_T(T) = 0$ (לפי

-3-

פונקציות סימטריות ו-אנטי סימטריות:

$$2 \cdot \frac{1}{F} + \frac{1}{F} = 0$$

$\text{char } F \neq 2$, אז F

$\wedge^{n \times n} V \subseteq T_2(V)$ $\xi: V \times V \rightarrow F$ פונקציה סימטרית - אנטי סימטרית

$$(1) \quad \xi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \xi(x_1, y) + \lambda_2 \xi(x_2, y)$$

$$(2) \quad \xi(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \xi(x, y_1) + \lambda_2 \xi(x, y_2)$$

$$(1) \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

מטריצה

$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\xi(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$(2) \quad B = (b_{ij})_{n \times n} \quad \text{מטריצה} \quad V = F^n$$

$$\xi(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i y_j$$

חבורת של פונקציות סימטריות ו-אנטי סימטריות:

$$(\lambda \xi)(x, y) := \lambda \xi(x, y) \quad \text{כפול סקלר}$$

הכללה: $T_2(V)$ היא תת-חבורה של פונקציות סימטריות ו-אנטי סימטריות.

$(T_2(V) : \text{פונקציות סימטריות ו-אנטי סימטריות})$

$$\forall x, y \in V \quad \xi(x, y) = 0 \quad : T_2(V) \text{ - אנטי סימטריות}$$

$$(-\xi)(x, y) = -\xi(x, y)$$

$$\xi(x, y) = \xi(y, x) : \text{פונקציה סימטרית}$$

$$\forall x, y \in V$$

$$\xi(x, y) = -\xi(y, x) : \text{פונקציה אנטי סימטרית}$$

$$T_2^{\text{sym}}(V) = \{ \xi \in T_2(V) \mid \xi \text{ סימטרית} \}$$

$$T_2^{\text{skew}}(V) = \{ \xi \in T_2(V) \mid \xi \text{ אנטי סימטרית} \}$$

$$T_2(V) \text{ - אנטי סימטריות} \quad \text{כל} \quad T_2^{\text{skew}}(V), \quad T_2^{\text{sym}}(V) \text{ - סימטריות}$$

$$T_2(V) = T_2^{\text{sym}} \oplus T_2^{\text{skew}}$$

-2/1C

$$\xi \in T_2^{\text{sym}} \cap T_2^{\text{skew}} = \{0\}$$

-הוכחה

$$\xi(y, x) = \xi(x, y) = \xi(y, x)$$

$$\& \xi(y, x) = 0$$

$$\xi = 0 \leftarrow \xi(y, x) = 0 \quad \forall x, y \in V$$

$\xi \in T_2(V)$. V בסיוס $[e] = (e_1, \dots, e_n)$ ה-צורה: יפה

$[e]$ כיוס ξ נכנסת

$$[B]_{\xi}^{[e]} = (\underbrace{\xi(e_i, e_j)}_{=b_{ij}})_{n \times n}$$

$[e]$ כיוס ξ נכנסת

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$$y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

$$\xi(x, y) = \xi\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) =$$

$$= \sum_i \sum_j \xi(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j$$

$\bar{B}_{n \times n}$ כיוס ξ נכנסת, יפה. $\xi \in T_2(F^n)$ כיוס ξ נכנסת
 $\xi(x, y) = \sum_{i,j} \bar{b}_{ij} x_i y_j$ כיוס ξ נכנסת ($= \bar{b}_{ij}$)

כיוס ξ נכנסת $\bar{B}$ כיוס ξ נכנסת

$$(x_1, \dots, x_n) = x = \sum_i x_i e_i$$

$$\xi(x, y) = \sum_{i,j} \bar{b}_{ij} x_i y_j \quad \underline{\underline{\mathbb{R}^n}}$$

$T_2(V) \rightarrow M_{n \times n}(F)$ כיוס ξ נכנסת . $[e]$ כיוס ξ נכנסת
 $\xi \mapsto B_{\xi}^{[e]}$ כיוס ξ נכנסת

הכנסה: $\alpha \in V$. $\beta \in V$. $\gamma \in V$ (הכנסה) $\leftarrow \gamma \in V$

$((C_{ij}) = C \in M_{n \times n}(F)$ $\alpha \in V$

$\xi(e_i, e_j) = C_{ij}$ $\xi \in T_2(V)$ $\alpha \in V$

$\xi(x, y) = \sum_{i,j} C_{ij} x_i y_j, \xi \in T_2(V)$

$\xi(e_p, e_q) = \sum_{i,j} C_{ij} \delta_{i,p} \delta_{j,q} = C_{pq}$

$\alpha \in V$

$\dim T_2(V) = (\dim V)^2$

$\alpha \in V$

$\xi(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j = [x_1, \dots, x_n] \cdot B_{\xi}^{[e]} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ $\alpha \in V$

$[e'] = [e] \cdot C$ V - $\alpha \in V$

$[e] \xrightarrow{C} [e']$ $\alpha \in V$

$B_{\xi}^{[e]} = C^t \cdot B_{\xi}^{[e']} \cdot C$

$\xi \in T_2(V)$ $\alpha \in V$

$\alpha \in V$

$x = \sum_i x_i e_i = \sum_i x'_i e'_i$
 $y = \sum_j y_j e_j = \sum_j y'_j e'_j$

$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$

$(*) \xi(x, y) = [x'_1 \dots x'_n] B_{\xi}^{[e']} \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}$

$\xi(x, y) = [x_1, \dots, x_n] B_{\xi}^{[e]} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

$$(**) [x_1', \dots, x_n'] (c^t \cdot B_{\xi}^{[e]} \cdot c) \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}$$

$$x_i', y_j' \text{ or } (*) = (**)$$

$$\underline{\underline{[e]}} \quad B_{\xi}^{[e]} = c^t \cdot B_{\xi}^{[e]} \cdot c, \text{ or}$$

$$\xi \in T_2(V) \quad \text{יד) : } \text{מרחב זוגות}$$

$$\ker^l(\xi) = \{x \in V \mid \xi(x, y) = 0 \quad \forall y \in V\}$$

$$\ker^r(\xi) = \{x \in V \mid \xi(y, x) = 0 \quad \forall y \in V\}$$

$$\text{אנחנו יודעים ש} \ker^l(\xi), \ker^r(\xi) \subset V$$

$$\dim \ker^l(\xi) = \dim \ker^r(\xi) = n - \text{rk}(\xi) = \omega \in \mathbb{N}$$

$$\xi(x, y) = x_1 y_2, \quad V = F^2, \quad \text{למשל}$$

$$\ker^l(\xi) = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1 y_2 = 0 \quad \forall y\} = \{x = (0, x_2)\}$$

$$\ker^r(\xi) = \{x = (x_1, x_2) \mid x_2 y_1 = 0 \quad \forall y\} = \{x = (x_1, 0)\}$$