שיעור 11

$T: V \to V$ נילפוטנטית $T^p = 0$.

$M^i = \ker T^i$

$M_1 \subset M_2 \subset \dots \underbrace{M^k \subseteq M^{k+1} = \dots}_{V}$

$N^i = \operatorname{Im} T^i$

$N^p = \operatorname{Im} T^p = \{\theta\}$

$N^1 \supset N^2 \supset \dots \supset \underbrace{N^k \supseteq N^{k+1} = \dots}_{\{\theta\}}$

$\operatorname{spec} T = \{0\}$

משפט- אם T נילפוטנטית קיימת צורת ז'ורדן, והיא יחידה עד כדי תמורת תאי ז'ורדן.

הוכחה- $m_e = \#\{$ תאי ז'ורדן מגודל e $\}$

$\theta \neq x \in V \leftarrow$ קיים i כך ש $\begin{cases} T^i(x) = \theta \\ T^{i-1}(x) = \theta \end{cases}$

$i = ht(x)$

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad e^{k+1} \qquad 0_{k+d} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

~~e_{k+d}~~

$e_{k+d} \xrightarrow{T} e_{k+d-1} \xrightarrow{T} e_{k+d-2} \xrightarrow{T} \dots \xrightarrow{T} e_{k+1} \xrightarrow{T} \theta$

$ht(e_{k+d}) = d \dots ht(e_{k+s}) = s, \; ht(e_{k+2}) = 2, \; ht(e_{k+1}) = 1$

$h_i = \{$ וקטורים מבסיס ז'ורדן מגובה i $\}$

$h_i = m_i + \underbrace{m_{i+1} + \dots}_{h_{i+1}}$

$m_i = h_i - h_{i+1}$

$h_i \overset{?}{=} \dim\ker T^i - \dim\ker T^{i-1}$

נסמן ב $A \subset \{1,2,\dots n\}$, $n = \dim V$

אינדקסים של איברי הבסיס -N $ht \le i$

נוכיח $\mathrm{span}\{e_j\}_{j\in A} = \ker T^i$

הוכחה: $B = \{1,\dots,n\} \setminus A$

$\supseteq$: יהי $x \in \ker T^i$, נוכיח $x \in \mathrm{span}\{e_j\}_{j\in A}$

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = \sum_{j\in A} e_j \alpha_j + \sum_{j\in B} \alpha_j e_j$$

$$\theta = T^i x = \sum_{j\in A} \alpha_j \underbrace{(T^i e_j)}_{=\theta} + \sum_{j\in B} \alpha_j (T^i e_j) =$$

$$= \sum_{j\in B} \alpha_j \underbrace{(T^i e_j)}_{= e_{j-i}} = \sum_{j\in B} \alpha_j e_{j-i} = \theta$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_j = 0 \quad \forall j \in B$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j\in A} \alpha_j e_j \in \mathrm{span}\{e_j\}_{j\in A}$$

$\subseteq$: מספיק להראות ש- $e_j \in \ker T^i$ אם $j \in A$

$$ht(e_j) \le i \Leftrightarrow T^i e_j = \theta$$

$$\dim\ker T^i = |A| = \underbrace{h_i + h_{i-1} + h_{i-2} + \dots}_{\dim\ker T^{i-1}}$$

$$h_i = \dim\ker T^i - \dim\ker T^{i-1}$$

h_i לא תלוי בבחירת בסיס ז'ורדן. $\leftarrow m_i = h_i - h_{i+1}$ גם
לא תלוי בבחירת בסיס ז'ורדן.

$\boxtimes$

למה 1: $T:V\to V$ ט"ל נילפוטנטית ויהי $x\in M^j\setminus M^{j-1}$

אז, לכל $i<j$

הוכחה: $y=T^ix$

$$T^{j-i}y = T^{j-i}(T^ix) = T^jx \underset{x\in M^j}{=} \theta$$

לכן, $T^ix = y\in M^{j-i}$

$$T^{j-i-1}y = T^{j-i-1}(T^ix) = T^{j-1}x \underset{x\in M^{j-1}}{\neq} \theta$$

לכן, $T^ix = y\notin M^{j-i-1}$. ☒

מסקנה: $M^j = M^{j-1}\oplus L$, אז

(1) $T(L)\subset M^{j-1}$

(2) $T(L)\cap M^{j-2} = \{\theta\}$

(3) $T|_L : L \cong T(L)$

למה 2: יהי M מ"ו נוצר סופית, $N,L\subset M$ תתי מרחב כך ש- $N\cap L=\{\theta\}$. אז קיים תמ"מ $L'\subset M$ כך ש:

(1) $L\subset L'$ (2) $N\oplus L' = M$

הוכחה: $N\oplus L\subset M$. קיים תת-מרחב ליניארי S כך ש-

$$(N\oplus L)\oplus S = M$$

$$L' = L\oplus S$$

$$N\oplus L' = M \quad ☒$$

משפט: לכל ט"ל נילפוטנטית קיים בסיס ז'ורדן.

הוכחה: $T:V\to V$, $T^p=0$

$$M^1\subset M^2\subset\dots\subset \underbrace{M^p = M^{p+1}\dots}_{V}$$

e_j^p הוא בסיס ל $\tilde{M}^p$

$T(\tilde{M}^p)\subset M^{p-1}$ ← לפי מסקנה 2.

לפי מסקנה 2 $\begin{cases} T(\tilde{M}^p) \cap M^{p-2} = \{\theta\} \\ T|_{\tilde{M}^p} : \tilde{M}^p \xrightarrow{\sim} \underbrace{T(\tilde{M}^p)} \end{cases}$

לפי משפט 3 (2), קיים $\tilde{M}^{p-1}$ כך ש- $T(\tilde{M}^p) \subset \tilde{M}^{p-1}$

$M^{p-1} = M^{p-2} \oplus \tilde{M}^{p-1}$

נשלים את $T(e_j^p)$ לבסיס של $\tilde{M}^{p-1}$ ע"י e_j^{p-1}

$T(\tilde{M}^{p-1}) \subset \tilde{M}^{p-2}$

הוכחנו $Te_j^{p-1}, T^2 e_j^p$ בת"ל (לפי מסקנה 2(3))

נשלים אותם לבסיס של $\tilde{M}^{p-2}$ ע"י e_j^{p-2}.

$$
\begin{array}{lllll}
V = M^p = \tilde{M}^{p-1} \oplus \tilde{M}^p & \leftarrow & e_j^p \text{ בסיס} & & \\
\cup & & & & \\
M^{p-1} = M^{p-2} \oplus \tilde{M}^{p-1} & \leftarrow & Te_j^p, & e_j^{p-1} & \\
\cup & & & & \\
M^{p-2} = M^{p-3} \oplus \tilde{M}^{p-2} & & T^2 e_j^p, & Te_j^{p-1}, & e_j^{p-2} \\
\vdots & & & & \\
M^1 = \tilde{M}_1 & & T^{p-1} e_j^p & T^{p-2} e_j^{p-1} \quad \dots & \qquad e_j^1
\end{array}
$$

$$V = \tilde{M}^p \oplus M^{p-1} = \tilde{M}^p \oplus \tilde{M}^{p-1} \oplus M^{p-2} = \dots =$$
$$= \tilde{M}^p \oplus \tilde{M}^{p-1} \oplus \dots \oplus \tilde{M}_1$$

$$e_j^p \xrightarrow{T} Te_j^p \to T^2 e_j^p \to \dots \to T^{p-1} e_j^p \to \theta$$

$T^{p-1} e_1^p, T^{p-2} e_1^p, \dots, Te_1^p, e_1^p;$

$T^{p-1} e_2^p, T^{p-2} e_2^p, \dots, Te_2^p, e_2^p;$

$\vdots$

$T^{p-1} e_{N_1}^p, T^{p-2} e_{N_1}^p, \dots, Te_{N_1}^p, e_{N_1}^p;$

$T^{p-2} e_1^{p-1}, T^{p-3} e_1^{p-1}, \dots, Te_1^{p-1}, e_1^{p-1}$

$$M_\mu^i = \ker(\underbrace{T-\mu Id}_{T_\mu})^i \ominus \qquad \mu\in spec(T) \quad T: V\to V$$

$$\ominus \ker T_\mu^i$$

$$N_\mu^i = Im\, T_\mu^i$$

$$\underset{V_\mu}{\overset{\shortparallel}{M_\mu^1}} \subset M_\mu^2 \subset \dots \subset \underbrace{M_\mu^k = M_\mu^{k+1}}_{\hat{M}_\mu} = \dots$$

טענה: תהי $T:V\to V$ כ״ל $spec\, T=\{\mu_1,\dots,\mu_k\}$

אזי, הסכום $\hat{M}_{\mu_1}+\hat{M}_{\mu_2}+\dots+\hat{M}_{\mu_k}$ הוא ישר.

הוכחה - אינדוקציה ב- k:

$k=1$: אין מה להוכיח.

$k-1\to k$: נניח $x_i\in\hat{M}_{\mu_i}$ כך ש- $x_1+\dots+x_k=\theta$

$$spec\left(T_{\mu_k}|\hat{M}_{\mu_i}\right) = \{\lambda\setminus\mu_k \mid \lambda\in spec\, \underset{T_{\mu_i}}{\overset{\updownarrow}{T}}|\hat{M}_{\mu_i}\} =$$

$i<k$ נילפוטנטי

$$= \{\lambda-\mu_k+\mu_i \mid \lambda\in \underbrace{spec\, T|\hat{M}_{\mu_i}}_{=\{0\}}\} = \{\mu_i-\mu_k\}$$

$$T_{\mu_k}^N x_1+\dots+T_{\mu_k}^N x_{k-1} + \underbrace{T_{\mu_k}^N x_k}_{\theta} = \theta$$