שיעור 2

משפט - V מ"ו נוצר סופית, $N \subset V^*$ תמ"ו, אזי $\dim N_0 + \dim N = \dim V$

הוכחה -

$$\dim N_0 = \dim C(N_0) = \dim N^0 = \dim V^* - \dim N = \dim V - \dim N \qquad \blacksquare$$

פולינומים פורמליים עם מקדמים בשדה F:

$g: \mathbb{F} \to \mathbb{F}$.

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$$

$\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$

$$g(x) = x^2 + x$$

$$g([0]_2) = [0]_2^2 + [0]_2 = [0]_2$$

$$g([1]_2) = [1]_2^2 + [1]_2 = [0]_2$$

הגדרה - הפולינום הפורמלי עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$ זאת סדרה אינסופית $f = (f_0, f_1, \dots)$ שרק מספר סופי שלה יכול להיות שונה מ-0.

* נסמן זמנית ב-B את אוסף כל הפולינומים הפורמליים.

הגדרה - חיבור:

$$f = (f_0, f_1, \dots) \in B$$

$$g = (g_0, g_1, \dots) \in B$$

$$g + f = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, \dots) \in B$$

כפל בסקלר:

$$f = (f_0, f_1, \dots) \in B$$

$$\lambda f = (\lambda f_0, \lambda f_1, \dots) \in B \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

טענה - עם הפעולות שהגדרנו, B הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$

$-f = (-f_0, -f_1, \dots)$ $\qquad \theta = (0, 0, \dots)$

הגדרה - כפל של שני פולינומים פורמליים: $f, g \in B$

$$(f \cdot g)_k := \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} f_i g_j \qquad k = (0, 1, 2, \dots)$$

הוכחה -

נוכיח $f\cdot g\in B$.

$$\begin{cases} f_i=0 & i\geq a \\ g_j=0 & j\geq b \end{cases}$$

$$k\geq a+b \qquad (f\cdot g)_k \overset{?}{=} 0$$

$$\underset{k\geq a+b}{(f\cdot g)_k} = \sum_{i+j=k\geq a+b} f_i g_j \longrightarrow$$ וכן, או $i\geq a$ או $j\geq b$

$$g_j=0 \qquad f_i=0$$

הערה - $f\cdot g=g\cdot f$

טענה - (חיבור)

$(f+g)h=fh+gh$, כאשר $f,g,h\in B$

הוכחה -

$$((f+g)h)_k = \sum_{i+j=k}(f+g)_i h_j =$$

$$= \sum_{i+j=k}(f_i+g_i)h_j = \sum_{i+j=k} f_ih_j+g_ih_j = (f\cdot h)_k+(gh)_k =$$

$$(fh+gh)_k = fh+gh \;\blacksquare$$

טענה - (כפל) $(f\cdot g)h = f\cdot(g\cdot h)$

הוכחה -

$$((f\cdot g)h)_k = \sum_{i+j=k}(f\cdot g)_i h_j =$$

$$= \sum_{i+j=k}\Big(\sum_{l+m=i}(f_l g_m)\Big)h_j = \sum_{l+m+j=k} f_l g_m h_j$$

$$(a,0,0,0\ldots)+(b,0,0,0\ldots) = (a+b,0,0,0\ldots)$$

$$(a,0,0,0\ldots)-(b,0,\ldots\ldots) = (a-b,0,0,0\ldots)$$

$$(f\cdot g)_0 = \sum_{i+j=k} f_i g_j = f_0g_0 = a\cdot b$$

$$(f\cdot g)_k = \sum_{i+j=k} \overset{0}{\widehat{f_ig_j}} = 0$$

$$k>0$$

$$(f_0,f_1,f_2,\ldots) = f_0+f_1x+f_2x^2+\ldots \qquad B=F[x]$$

הגדרה - $0\neq f\in F[x]$ $\quad f=f_0+f_1x+\ldots+f_nx^n$

$$f_n\neq 0$$

$$n=\deg f$$

נגדיר פונקציה מהפולינומים לפונקציות פולינומיאליות: $T: F[x] \to F^F$

$$f = f_0 + f_1 x + \dots + f_n x^n$$

$$(Tf)(t) = f_0 + f_1 t + \dots + f_n t^n \qquad \forall t \in F$$

טענה- (1) T ט"ל

(2) $T(f \cdot g) = Tf \cdot Tg$

הוכחה- (1) (*) $T(f+g) \stackrel{?}{=} T(f) + T(g)$, צ"ל שלכל $t \in \mathbb{F}$

$$(T(f+g))t \stackrel{?}{=} (T(f)+T(g))(t)$$

$$(f_0+g_0) + (f_1+g_1)t + \dots + (f_n+g_n)t^n = (Tf)(t) + (Tg)(t) =$$
$$= (f_0 + f_1 t + \dots + f_n t^n) + (g_0 + g_1 t + \dots + g_n t^n)$$

(**) צ"ל: לכל $t \in \mathbb{F}$

$$(T(f \cdot g))(t) \stackrel{?}{=} (Tf \cdot Tg)(t)$$

$$(Tf)(t) \cdot (Tg)(t) =$$
$$= (f_0 + f_1 t + \dots + f_n t^n)(g_0 + g_1 t + \dots + g_n t^n) =$$
$$= \sum_{i,j \geq 0} f_i t^i \cdot g_j t^j = \sum_k \underbrace{\left(\sum_{i+j=k} f_i g_j \right)}_{(f \cdot g)_k} t^k = (T(fg))(t) \quad \boxtimes$$

הגדרה- יהי $f \in P[x]$, $a \in F$ נקרא שורש של F אם

$$(T(f))(a) = f(a) = 0$$

טענה- (1) אם $f, g \in F[x]$, וגם $f \cdot g = 0$, אז $f = 0$ או $g = 0$. (ב-$F[x]$ אין מחלקי 0)

(2) אם $f, g \neq 0$, אז: $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$

(3) $\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$