

מרחב וקטורי

F חז"ל V, W , F

$$\mathcal{L}(V, W) = \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ ליניארי}\}$$

$$\mathcal{L}(V, F) = V^*$$

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$$

$$\dim V^* = \dim V$$

φ_a , $\{a_1, \dots, a_n\} \in F^n$

$$\varphi_a: F^n \rightarrow F$$

$$\varphi_a \in (F^n)^*, \text{ נניח } , \varphi_a(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

$$a = \{a_1, \dots, a_n\} \in F^n$$

$\varphi = \varphi_a$, $a \in F^n$, קיימים ויחיד , $\varphi \in (F^n)^*$

התמונה $F^n \rightarrow (F^n)^*$, $a \mapsto \varphi(a)$ היא איזומורפיזם של מרחב וקטורי.

בסיס דואלי - $e_1, \dots, e_n \in V$, $1 \leq i \leq n$, $e_i \in V^*$

$$e_i(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_i$$

$(e_1, \dots, e_n) \in V^*$ - בסיס "הבסיס הדואלי"

$$\varphi = \varphi(e_1) e_1 + \dots + \varphi(e_n) e_n, \varphi \in V^*$$

$$f = \varphi - (\varphi(e_1) e_1 + \dots + \varphi(e_n) e_n)$$

$f = 0$, $1 \leq i \leq n$, $f(e_i) = 0$

$$f(e_i) = \varphi(e_i) - (\varphi(e_1) e_1 + \dots + \varphi(e_n) e_n)(e_i) =$$

$$\varphi(e_i) - (\varphi(e_i) \cdot \delta_{ii}) = 0$$

$\dim V^* = n$, $f = 0$, $e_1, \dots, e_n \in V^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ בסיס

המשפט הראשון: $S \subseteq V$ ו- $S^\circ = \{ \varphi \in V^* \mid \varphi(s) = 0 \ \forall s \in S \}$ (המשפט הראשון)

$$(1) \quad V^\circ = \{ \theta_V \}$$

המשפט השני

$$(2) \quad \{ \theta_V \}^\circ = V^*$$

המשפט השלישי: $S^\circ \subseteq V^*$ (1)

$$S_1^\circ \supseteq S_2^\circ \iff S_1 \subseteq S_2 \text{ p/c } (2)$$

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha \right)^\circ = \bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha^\circ \quad (3)$$

$$(\text{span}(S))^\circ = S^\circ \quad (4)$$

המשפט הרביעי: $\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 \in S^\circ$: $\checkmark$, $\varphi_1, \varphi_2 \in S^\circ$ ו- $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{F}$ (1)

$$(\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2)(s) = 0 \quad \forall s \in S \iff$$

$$\mu_1 (\varphi_1(s)) + \mu_2 (\varphi_2(s)) = 0$$

$$\varphi_1 \in S^\circ \quad \varphi_2 \in S^\circ$$

$$\varphi(s) = 0, \forall s \in S_1 \iff \varphi \in S_1^\circ \quad \checkmark, \quad S_2^\circ \text{ ו- } (2)$$

$$S_1^\circ \subseteq S_2^\circ$$

המשפט החמישי

$$\varphi \in S^\circ \iff \left(\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha \right)^\circ \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha^\circ \quad (3)$$

$$\varphi(s) = 0 \text{ } \forall s \in S_\beta \iff \varphi \in S_\beta^\circ$$

$$\varphi \in \bigcap S_\alpha^\circ \subseteq \left(\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha \right)^\circ \iff \varphi(s) = 0 \iff s \in S_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$$

$$\text{אם } \beta \in A \text{ אז } S_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha \text{ ולכן } \varphi(s) = 0 \text{ } \forall s \in S_\beta$$

$$\varphi \in \bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha^\circ \subseteq S_\beta^\circ$$

$$\varphi \in S^\circ \subseteq (\text{span}(S))^\circ : \checkmark \quad S^\circ \supseteq (\text{span}(S))^\circ \iff S \subseteq \text{span}(S) \quad (4)$$

$$S_i \in S, \forall i, \lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_K S_K, \varphi(v) = 0, \forall v \in \text{span}(S) \text{ } \checkmark$$

$$\varphi(v) = \lambda_1 \varphi(S_1) + \dots + \lambda_K \varphi(S_K) = 0$$

-3-

למשל - יהי V וזרס וספיר, $M \subset V$ מ"מ ספירי. לוי.

$$\dim M + \dim M^\circ = \dim V$$

הוכחה - יהי $e_1, \dots, e_m \in M$ בסיס ל M , $m = \dim M$. לפי.

$e_1, \dots, e_n \in V$ בסיס ל V ו- $e_{m+1}, \dots, e_n \in V$ בסיס ל M° .

נוכח $M^\circ = \text{span}(e_{m+1}, \dots, e_n)$ לפי הוכחה אחרת, $\Rightarrow \dim M^\circ = n - m$

$$\Rightarrow \dim V - \dim M$$

$$0 = \varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_m) \quad x \in M \quad \text{כי, } \varphi(x) = 0 \iff \varphi \in M^\circ$$

$$\varphi = \varphi(e_1)e_1 + \dots + \varphi(e_m)e_m + \varphi(e_{m+1})e_{m+1} + \dots + \varphi(e_n)e_n$$

$$\varphi \in \text{span}(e_{m+1}, \dots, e_n) \iff \varphi \in M^\circ$$

המשפט - יהי V וזרס וספיר, $T \subset V^*$ מ"מ ספירי, N מ"מ ספירי.

$$T_0 = \{x \in V \mid \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in T\}, \quad T \text{ אבסורבן, } T_0 = \bigcap_{\varphi \in T} \ker \varphi$$

$$T_0 \subset V \quad (1) \quad \text{משפט - } T_0 \text{ תת-מ"מ ספירי}$$

$$(T_2)_0 \subset (T_1)_0 \iff T_1 \subset T_2 \quad (2)$$

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha \right)_0 = \bigcap_{\alpha \in A} (T_\alpha)_0 \quad (3)$$

$$(\text{span } T)_0 = T_0 \quad (4)$$

למשל - יהי V וזרס וספיר, $N \subset V^*$ מ"מ ספירי. אזי.

$$\dim N + \dim N_0 = \dim V$$

הוכחה בואי שני:

$$C: V \rightarrow V^{**} \quad \text{הקנה, } C \text{ איזו, } V^{**} = (V^*)^*$$

הקנה C ל V וזרס וספיר.

הקנה C ל V וזרס וספיר:

$$C(T_0) = T^\circ \subset V^{**} \quad \text{אזי, } T \subset V^* \quad (1)$$

$$\dim N_0 = \dim C(N_0) = \dim (N^\circ) =$$

$$= \dim V^* - \dim N = \dim V - \dim N$$

$C: V \rightarrow V^{**} (V^*)^*$ נבדל. נ"מ V ה' : C על ה' $\emptyset$

$$C(v) \in V^{**}$$

$$C(v): V^* \rightarrow F \quad C(v)(\varphi) = \varphi(v) \in F \quad \varphi \in V^* \text{ בר}$$

. ל"ב $C(v)$ על F : β

$$C(v)(\varphi_1 \lambda_1 + \varphi_2 \lambda_2) \stackrel{?}{=} \lambda_1 (C(v)(\varphi_1)) + \lambda_2 (C(v)(\varphi_2)) +$$

$$(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)(v)$$

$$\lambda_1 (\varphi_1(v)) + \lambda_2 (\varphi_2(v))$$

$$\lambda_1 \varphi_1(v) + \lambda_2 \varphi_2(v)$$

: β . ל"ב C - e נכונה

$$C(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 C(v_1) + \lambda_2 C(v_2)$$

$$\varphi \in V^* \text{ בר} \iff$$

$$C(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(\varphi) \stackrel{?}{=} (\lambda_1 C(v_1) + \lambda_2 C(v_2))(\varphi)$$

$$LHS = \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2)$$

$$RHS = \lambda_1 C(v_1)(\varphi) + \lambda_2 C(v_2)(\varphi) =$$

$$= \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2)$$

. ל"ב , נכונה

$\dim V^{**} = V$. נבדל C - e נכונה , נכונה V נ"מ

$\ker C = \{\theta_v\}$ נכונה , θ_v C - e נכונה $\varphi \in V^*$

$$C(v)(\varphi) = 0, \quad \varphi \in V^* \text{ בר, } C(v) = \theta_v^{**} \quad \forall v \in \ker C$$

ל"ב θ_v φ v λ μ , $v \neq \theta$ θ_v θ_v

$\varepsilon_i(v) = \varepsilon_i(e_i) = 1 \neq 0$, λ . θ_v ε_i θ_v . $V = e_1, \dots, e_n$

λ C , נכונה . $\ker C = \{\theta_v\}$ μ , $v = \theta$ μ . נכונה

. נכונה

נכונה $T \in V^*$, λ θ_v V , θ_v - θ_v

$$C(T\theta) = T^\circ, \quad \lambda$$

-5-

$$C: V \xrightarrow{\sim} V^{**}$$

$$C(T_0) \subset T^0 \quad \text{-- הוכחה --}$$

$$\varphi \in T \text{ בר } (C(v))(\varphi) = 0 \iff C(v) \in T^0 \quad \text{ידי, } \forall v \in T_0$$

$$T \subset C(T_0) \text{ . } \varphi \in T \text{ בר } \varphi(v) = 0 \iff \varphi \in T^0 \text{ . } \text{הוכחה}$$

$$\varphi(v) = 0 \iff v \in C^{-1}(x) \in T_0 \quad \text{ידי, } x \in T^0$$

$$C(v)(\varphi) = 0 \iff \varphi \in T^0 \text{ . } \text{הוכחה}$$