ליניארית משפטים חשובים

משפט: ט"ל ליניארית $\varphi: V\to V$ לכסינה $\Leftrightarrow$ P_φ מתפרק למכפלה של גורמים ממעלה ראשונה וגם ריבוי אלגברי של כל ע"ע = ריבוי גיאומטרי שלו.

טענה: ריבוי אלגברי $\geq$ ריבוי גיאומטרי.

משפט: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ נוצר סופית. $\varphi: V\to V$ ט"ל. אזי קיים תת מרחב φ-אינווריאנטי ממימד 1 או 2. ← הוכחה ע"י מרוכבים.

משפט: יהי V מ"ו נוצר סופית מעל F. $\varphi: V\to V$ ט"ל.

אינדוקציה על $\dim V$, פירוק לנ"ע וחפיפה ושימוש במשפט על נ"ע

① ל-φ קיימת צורת ז'ורדן $\Leftrightarrow$ P_φ מתפרק לגורמים ממעלה 1.

② אם צורת ז'ורדן קיימת אז היא יחידה עד כדי תמורה של בלוקי הז'ורדן. ← מיחידות אופ' נילפ'

משפט: תהי $\varphi: V\to V$ ט"ל. אזי קיימת הצגה יחידה $\varphi=\varphi_1\oplus\varphi_2$ כאשר φ_1 נילפוטנטית, φ_2 הפיכה.

משפט: לכל טרנספורמציה ליניארית נילפ' קיים בסיס ז'ורדן כאשר לכל תא ז'ורדן יש אלמנט מקסימלי ← מוכיחים באמצעות השמות לבססססס $M^0\subseteq M^1\subseteq\ldots\subseteq M^p$

משפט Caylay Hamilton: $P_A(A)=0_{n\times n}$ ← הרחבנו בשדה סגור אלגברית

משפט: $T_2(V)=T_2^{Sym}(V)\oplus T_2^{Skew}(V)$

תבניות בילינאריות ← סימטריים, אנטי סימטרים

טענה: ξ תבנית בילינארית סימטרית, $L\subset V$ אזי $\dim L_{\perp\xi}\geq \overset{\dim V}{n}-\dim L$

טענה: $\xi|_L$ לא מנוון ($rk(\xi|_L)=\dim L$) אזי $V=L\oplus L_{\perp\xi}$

משפט: לכל תבנית בילינארית סימטרית קיים בסיס מלכסן.

-שיטות נדרשות ללכסון תבניות ריבועיות-

משפט יעקובי: תהי q תבנית ריבועית ב-n משתנים מדרגה n. אזי ניתן ללכסן את q לצורה $\lambda_1y_1^2+\ldots+\lambda_ky_k^2$ בעזרת החלפת משתנים עם מטריצה משולשית יחידה $\begin{bmatrix}1 & * \\ & \ddots \\ & & 1\end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $\lambda_k=\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$, $\forall i\ \Delta_i\neq 0$, $\Delta_0:=1$

דטרמיננטה של מינור זוויתי

קיימים בסיס בהם הן שוות

משפט: מעל שדה סגור אלגברית, שתי תבניות ריבועיות שקולות ⟺ דרגתן זהה.

הוכחה בשנייה

משפט: אינדקס אינרציה החיובי והשלילי לא תלויים בבחירת הבסיס המלכסן.

טענה: מטריצה ממשית סימטרית B מוגדרת חיובית ⟺ קיימת הצגה $B=C^tC$ כאשר C ממשית הפיכה

⟸ $\det B>0$

מוכיחים עם יעקובי

משפט סילבסטר: B מטריצה ממשית סימטרית. B מוגדרת חיובית ⟺ $\forall 1\le k\le n: \Delta_k>0$

מטריצת גרם

משפט: אם φ תבנית ריבועית מוגדרת חיובית אזי $\det B_b(x_1,..,x_n)\ge 0$ ושוויון

מתקבל ⟺ $x_1,..,x_n$ ת"ל... ← מקרה פרטי כש $n=2$ נותן את קושי שוורץ.

פשוט כי קיים בסיס בו המ"פ בצורה קנונית $= I$ ←

משפט: ① בכל מרחב אוקלידי קיים בסיס אורתונורמלי.

② אם $e_1,..,e_n\in V$ בסיס אורתונורמלי אזי לכל $x\in V$: $x=\sum_{i=1}^{n}(e_i,x)\cdot e_i$

③ אם $e_1,..,e_n\in V$ בסיס אורתונורמלי, $x=\sum x_ie_i, y=\sum y_ie_i$ אזי $(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

למה: כל סדרה אורתוגונלית של וקטורים $\neq 0$ היא בת"ל.

אלגוריתם גרם שמידט –

משפט ריס: יהי V מרחב אוקלידי. לכל $\xi\in V^*$ קיים ויחיד $a\in V$ כך ש- $\xi(x)=(x,a)$ $\forall x\in V$

טענה: V מרחב אוקלידי. $\varphi: V\to V$ סל"ה. $M\subseteq V$ תמ"ו φ אינו' ⟸ $M_\perp$ הוא φ^* אינווריאנטי.

משפט: V מרחב אוקלידי. $\varphi: V\to V$ צמודה לעצמה. אז קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של φ (השלמה לבסיס מלכסן). ← אינדוקציה: נוכיח ל- $n=2, n=1$ ומשם משתמשים כי קיים תמ"ו ממימד 2 או 1 φ אינו'.

טענה: φ צמודה לעצמה. אזי ו"ע עם ע"ע שונים, אורתוגונליים זה לזה.

משפט: V מרחב אוקלידי. ξ פונ' בילינארית סימטרית על V. אזי קיים בסיס אורתו' שבו המטריצה של ξ אלכסונית.

מסקנה: ξ_1,ξ_2 בילינאריים סימטריים, ξ_1 מוגדרת חיובית ⟸ קיים בסיס אורתו' שמלכסן את שניהם.

טענה: V מרחב אוקלידי. $T: V\to V$ ~~[illegible]~~ סל"ה. אזי הטענות הבאות שקולות:

① T אורתוגונלית $\forall x\in V\ |Tx|=|x|$

② T מעבירה כל בסיס אורתו' לבסיס אורתו'

③ קיים בסיס אורתו' ש-T מעבירה אותו

④ $T^*\cdot T=Id$

המשך לינארית - משפטים חשובים

משפט: תהי $T:V\to V$ ט"ל אורתוגונלית. אזי קיים בסיס אורתונורמלי $e_1,..,e_n$ שבו המטריצה של T היא

$$\begin{bmatrix} \boxed{} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{} & & \\ & & & \pm 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \pm 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

הבלוקים בגודל 2

הבלוקים בגודל 1

← הבלוקים ± 1 מוגדרים באופן יחיד, $-\pi < \theta_1,..,\theta_s \le \pi$ מוגדרים באופן יחיד עד כדי תמורה וסימן.

טענה: $U:V\to V$ ט"ל אורתוג' של מרחב אוקלידי. $M\subset V$ תמ"ו U-אינו'. אזי $M_\perp$ גם U אינו'.

טענה: $U:V\to V$ אורתוג'. יהי $x+iy$ ו"ע של U^c עם ע"ע $\lambda=\alpha+i\beta\notin\mathbb{R}$. אזי:

(1) $|\lambda|=1$ (2) $|x|=|y|$ (3) $(x,y)=0$

טענה: ט"ל T צמודה לעצמה היא $\underbrace{\text{מוגדרת חיובית}}_{T^*=T \text{ וגם } \forall x\neq 0,\ (Tx,x)>0}$ $\Leftrightarrow$ כל ע"ע שלה חיובי!

טענה: תהי $T:V\to V$, $T>0$. אזי קיימת ויחידה ט"ל $S>0$ כך ש- $S^2=T$

משפט: $\varphi:V\to V$ ט"ל הפיכה (V מרחב אוקלידי). אזי קיימת יחידה הצגה $\varphi=\underset{\text{אורתוג'}}{U}\circ\underset{\text{מוגדרת חיובית}}{T}$

וכן קיימת ויחידה הצגה $\varphi=\underset{>0}{T_1}\circ\underset{\text{אורתוג'}}{U_1}$.

⚠ כעת משפטים הרמיטיים שכולם דומה שהיה עד כה ⚠

טענה: אם B מטריצה הרמיטית אזי $\det B\in\mathbb{R}$

משפט: תהי $\varphi:V\to V$ הרמיטית צמודה לעצמה. אזי:

① כל הע"ע של φ ממשיים.

② קיים בסיס אורתוני' של V של ו"ע.

טענה: יהי V מרחב הרמיטי נוצר סופית. $U:V\to V$ ט"ל. הטענות הבאות שקולות:

① U אוניטרית $\forall x,y\in V\ (Ux,Uy)=(x,y)$

② U שומרת מכפלה פנימית

③ U שומרת על נורמה

④ $U^*U=Id$

⑤ מטריצה של U בכל בסיס אורתונ' היא אוניטרית $A^*A=I$

⑥ קיים בסיס בו המטריצה אוניטרית.

משפט: תהי $U:V\to V$ אוניטרית (V נוצר סופית). אזי:

① כל ע"ע של U זה מספר מרוכב מנורמה 1.

② קיים בסיס אורתוני' של V של ו"ע של U.