תרגול ליניארית

פירוק פולרי:

שורש של מטריצה ריבועית: תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית מוגדרת חיובית.
אזי קיימת ויחידה מט' $B\in M_n(\mathbb{R})$ כך ש- $B^2=A$.

מציאת B: A ניתנת ללכסון א"נ. מוצאים P א"נ הפיכה כך ש- $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$
כש- ה- λ_i חיוביים כי A מוגדרת חיובית. מתקיים $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$
ומגדירים $B=P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}$ ואז B סימטרית מוגדרת חיובית,
ומתקיים $B^2=A$.

פירוק פולרי: יהי V מרחב אוקלידי, $T:V\to V$ אופרטור לינארי כלשהו.
נניח ש- T הפיך. אזי קיימים $U,P:V\to V$ כך ש P מוגדר חיובית,
U א"נ ו- $T=UP$.

תרגיל: מצאו פירוק פולרי עבור המט' $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$

פתרון: $A^tA=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$. A^tA סימטרית ומוגדרת חיובית.
נחפש את $\sqrt{A^tA}$. נלכסן א"נ את A^tA. הפולינום האופייני הוא
$P_A(t)=\det\begin{pmatrix}t-5&-4\\-4&t-5\end{pmatrix}=\dots=(t-1)(t-9)$

נמצא ו"ע: $M_1=N\begin{pmatrix}-4&-4\\-4&-4\end{pmatrix}=Sp\{\frac{1}{\sqrt2}\binom{1}{-1}\}$, $M_9=N\begin{pmatrix}4&-4\\-4&4\end{pmatrix}=Sp\{\frac{1}{\sqrt2}\binom{1}{1}\}$

הוקטורים $\frac{1}{\sqrt2}\binom{1}{-1}$, $\frac{1}{\sqrt2}\binom{1}{1}$ מנורמלים ואורתוגונליים המט' $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$
אורתוג' וכן: $Q^{-1}A^tAQ=Q^tA^tAQ=\begin{pmatrix}1&0\\0&9\end{pmatrix}$

לכן ניקח $P=Q\begin{pmatrix}\sqrt1&0\\0&\sqrt9\end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ וכן $U=AP^{-1}=\dots=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ ■

מרחבים הרמיטיים:

תרגיל: יהי V מרחב הרמיטי ו- $T:V\to V$ ט"ל המקיימת $\langle Tv,v\rangle=0$ לכל $v\in V$
הראו ש- $T=0$.

פתרון: לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle T(u+v),u+v\rangle=0$ P.

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\langle Tu,u\rangle}_{0}+\langle Tu,v\rangle+\langle Tv,u\rangle+\underbrace{\langle Tv,v\rangle}_{0}=0$$

$$\text{(I)}\quad \langle Tu,v\rangle+\langle Tv,u\rangle=0$$

מכיוון שהשוויון נכון לכל u,v נוכל להציב iu במקום u:

$$\langle iTu,v\rangle+\langle Tv,iu\rangle=0 \Rightarrow i(\langle Tu,v\rangle-\langle Tv,u\rangle)=0 \quad \text{(II)}$$

נחבר את (I) ו- (II) ונקבל $2\langle Tu,v\rangle=0$ $\forall u,v \xLeftarrow{\text{נבחר } v=Tu} T=0$.

⚠ הטענה לא נכונה במרחבים אוקלידיים כי למשל $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקת הסיבוב

ב- 90° ואז $\langle Tv,v\rangle=0$ אבל $Tv\neq 0$ (גם T סימטרית נכון!)

<u>תרגיל</u>: הראו שבמרחב הרמיטי מתקיים $T=T^* \Leftrightarrow \langle Tv,v\rangle\in\mathbb{R}$ $\forall v\in V$

פתרון: $\boxed{\Leftarrow}$ נניח $T=T^*$ אז לכל $v\in V$ מתקיים $\langle Tv,v\rangle=\langle v,T^*v\rangle=\langle v,Tv\rangle=$
$=\overline{\langle Tv,v\rangle} \Rightarrow \langle Tv,v\rangle\in\mathbb{R}$

$\boxed{\Rightarrow}$ נראה ש- $T-T^*=0$. נשתמש בשאלה הקודמת:

$$\langle (T-T^*)v,v\rangle=\langle Tv,v\rangle-\langle T^*v,v\rangle=\langle Tv,v\rangle-\langle v,Tv\rangle=\langle Tv,v\rangle-\overline{\langle Tv,v\rangle}=0$$

$\blacksquare$

<u>תרגיל</u>: יהי V מרחב מכפלה פנימית, $T:V\to V$ העתקה לינארית אוניטרית

כך ש- T^2 צמודה לעצמה. מצאו את הע"ע האפשריים של T.

<u>פתרון</u>: נניח ש- $\lambda=a+bi$ ע"ע של T ($a,b\in\mathbb{R}$). מאחר ו- T אוניטרית,

$|\lambda|^2=a^2+b^2=1$. בנוסף λ^2 ע"ע של T^2 (כי אם $Tv=\lambda v$ אז $T^2v=\lambda^2 v$)

לכן $\lambda^2\in\mathbb{R}$. כלומר: $\mathbb{R}\ni\lambda^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$

לכן $a=0 \Leftarrow 2ab=0$ או $b=0$.

אם $a=0$ אז $b=\pm1 \Leftarrow |\lambda|^2=b^2=1$ ואם $b=0$ אז $a=\pm1$.

לכן הע"ע האפשריים הם $\{1,-1,i,-i\}$.

⚠ לכסון הרמיטי|אוניטרי זהה לאלגוריתם האוקלידי: מוצאים בסיס למרחבים העצמיים, מפעילים תהליך גרם שמידט על הבסיס הזה וסה"כ הוקטורים המתקבלים מהווים את הבסיס הרצוי!

<u>תרגיל</u>: יהי V מרחב הרמיטי ויהי $L:V\to V$ אופ' לינארי. הראו שהתנאים הבאים שקולים:

(1) יש T הרמיטית כך ש- $L=T^2$

(2) יש S כך ש- $L=SS^*$

(3) $0\le\langle Lv,v\rangle\in\mathbb{R}$ לכל $v\in V$

<u>הוכחה</u>: $\boxed{2\Leftarrow1}$ T הרמיטית תהי $L=T^2=TT^*$ אז נקח $T=S$.

$\boxed{3\Leftarrow2}$ $\langle Lv,v\rangle=\langle SS^*v,v\rangle=\langle S^*v,S^*v\rangle\ge0$

$\boxed{1\Leftarrow3}$ הנתון בפרט אומר ש- $\langle Lv,v\rangle\in\mathbb{R}$ לכל v ולכן עפ"י תרגיל שעשינו קודם L הרמיטית.

מכאן L ניתנת ללכסון אוניטרי. כלומר יש בסיס א"נ $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ של V המורכב

מוקטורים עצמיים של L. בנוסף, כל הע"ע של L אי-שליליים. נכתוב

ממשי כי $[T]_B$ הרמיטית

$Lv_i=\lambda_i v_i$, אז $\lambda_i\ge0$, נגדיר $T:V\to V$ ע"י $Tv_i=\sqrt{\lambda_i}v_i$ אזי $T^2=L$ ו- T הרמיטית