תרגול 13 ליני':

מטריצות וטרנספורמציות אורתוגונליות

<u>הגדרה</u>: $A\in M_n(\mathbb{R})$ נקראת אורתוגונלית אם היא מקיימת את התנאים השקולים הבאים:

א. $AA^t=A^tA=I$

ב. שורות A מהוות בסיס א"נ ל-$\mathbb{R}^n$ ביחס למ"פ סטנדרטית

ג. עמודות A " ______

<u>הגדרה</u>: יהי V מרחב אוקלידי. העתקה $T:V\to V$ נקראת אורתוגונלית אם היא מקיימת את התנאים השקולים הבאים:

א. $Id=T^*T=TT^*$

ב. $\langle x,y\rangle=\langle Tx,Ty\rangle$ לכל $x,y\in V$

ג. $\|Tx\|=\|x\|$ לכל $x\in V$.

<u>תרגיל</u>: יהיו A,B מט' א"ג. הראו שאם $\frac{1}{2}(A+B)$ א"ג $\Leftarrow A=B$.

<u>הוכחה</u>:

נסמן $A=\begin{pmatrix}| & & |\\ v_1 & \cdots & v_n\\ | & & |\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}| & & |\\ u_1 & \cdots & u_n\\ | & & |\end{pmatrix}$. מכיוון ש-$A,B$ א"ג, הרי $\{u_1,..,u_n\}$, $\{v_1,..,v_n\}$ בסיסים א"נ של $\mathbb{R}^n$ ביחס למ"פ סטנדרטית.

נתון ש-$\frac{1}{2}(A+B)$ א"ג. לכן גם $\{\frac{1}{2}(u_1+v_1),...,\frac{1}{2}(u_n+v_n)\}$ בסיס א"נ של $\mathbb{R}^n$.

בפרט, לכל i: $1=\|\frac{1}{2}(u_i+v_i)\|\le\|\frac{1}{2}u_i\|+\|\frac{1}{2}v_i\|=\frac{1}{2}\|u_i\|+\frac{1}{2}\|v_i\|=1$

קיבלנו שוויון באי שוויון משולש $\Leftarrow$ u_i ו-v_i פרופ', כלומר $v_i=\lambda_i u_i$ כאשר $\lambda>0$.

מתקיים: $1=\|u_i\|=\|\lambda v_i\|=\lambda\|v_i\|=\lambda\cdot 1\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow u_i=v_i$

לכל i $\Leftarrow$ $A=B$ ✓

<u>תרגיל</u>: נתבונן ב-$M_n(\mathbb{R})$ עם המ"פ $\langle A,B\rangle=tr(B^tA)$. תהי $M\in M_n(\mathbb{R})$ ונגדיר $T:M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$ ע"י: $T(A)=MA$. הראו ש-T אורתוג' $\Leftrightarrow$ M אורתוג'.

<u>פתרון</u>: $\boxed{\Leftarrow}$ נניח M א"ג. נראה ש-T משמרת נורמה. תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$

$\|TA\|^2=\|MA\|^2 \Leftrightarrow \Leftarrow$ $\langle MA,MA\rangle=tr((MA)^tMA)=tr(A^t\underbrace{M^tM}_{\text{א"ג } M}A)=tr(A^tA)=$

$=\langle A,A\rangle=\|A\|^2$ ✓

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח T א"ג. נראה ש-$M^tM=I$. ראשית נשים לב ש:

$\langle MA,B\rangle=tr(B^tMA)=tr((M^tB)^tA)=\langle A,M^tB\rangle$ ⊛

כעת, לכל A מתקיים:

$$\|(M^tM-I)A\|^2 = \langle (M^tM-I)A, (M^tM-I)A\rangle =$$

$$= \langle M^tMA, M^tMA\rangle + \langle A,A\rangle - \underbrace{\langle M^tMA, A\rangle}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\langle A, M^tMA\rangle}_{\mathrm{II}}$$

נבדוק שהמחוברים מתבטלים:

$$(\mathrm{I})\ \langle M^tMA, A\rangle \overset{*}{=} \langle MA, MA\rangle = \langle TA, TA\rangle \overset{T\text{ א"ז}}{=} \langle A,A\rangle$$

$(\mathrm{II})\ \langle M^tMA$ - - - ___

הדבר שצריך לעשות: * מטלה ש- $T^*(A)=M^tA$

⇐ T א"ז לכן $T\circ T^* = Id$ ולכן אם נפעיל על מטריצת I נקבל:

$$I = T\circ T^*(I) = M(M^tI) = MM^t \quad \blacksquare$$

טענה מרכזית: כל העתקה אורתוג' $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ נתונה ע"י כפל במטריצה מאחת הצורות הבאות:

$$R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad S_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

R_θ: det=1, סיבוב

S_θ: det=-1, שיקוף

טענה: כל סיבוב ניתן להציג כהרכבה של שני שיקופים S_θ, S_φ.

$$S_\theta\cdot S_\varphi = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix}\cos(\theta-\varphi) & -\sin(\theta-\varphi)\\ \sin(\theta-\varphi) & \cos(\theta-\varphi)\end{pmatrix}$$

⇐ ניתן לקבל סיבוב ב-α מעלות ע"י הרכבת שיקופים S_θ, S_φ כאשר $\theta-\varphi=\alpha$ (למשל $\varphi=0$, $\theta=\alpha$).

משפט - צורה קנונית של העתקה אורתוג':

V מרחב אוקלידי ותהי $T:V\to V$ העתקה א"ז. אז קיים בסיס א"נ B של V כך ש- $[T]_B$ בעלת הצורה

$$\begin{pmatrix}
\boxed{\begin{matrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{matrix}} & & & & \\
& \ddots & & & \\
& & \boxed{\begin{matrix}\cos\theta_s & -\sin\theta_s\\ \sin\theta_s & \cos\theta_s\end{matrix}} & & \\
& & & \boxed{\pm1} & \\
& & & & \ddots \\
& & & & & \boxed{\pm1}
\end{pmatrix}$$

בשפת מטריצות: אם A מטריצה א"ז אז קיימת P א"ז כך ש- P^tAP בעלת הצורה הנ"ל.

__תזכורות:__ (1) λ ע"ע של ${}^cT$ ⇐ $|\lambda|=1$.

(2) $W\le V$ T אינו' ← $W_\perp$ T אינו'.

(3) אם λ ע"ע של ${}^cT$ שונה ממשי ו- $u+iv\in{}^cV$ ו"ע, אז u,v פורשים תת מרחב T אינו' ממימד 2. ואם נכתוב $\lambda=\alpha+i\beta$ אז $[T|_{sp\{u,v\}}]_{\{u,v\}} = \begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$

(4) $[T]_B = [{}^cT]_B$ ← כאשר מתייחסים על B כבסי' חוקית ל- ${}^cV$

המשך תרגול לינארית:

<u>תרגיל:</u> נתונה הטרנספורמציה האורתוג' $T_A:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ המוגדרת ע"י כפל במטריצה $A=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&\frac12&\frac12\\ \frac12&\frac12&-\frac12&-\frac12\\ -\frac12&\frac12&-\frac12&\frac12\\ -\frac12&\frac12&\frac12&-\frac12\end{pmatrix}$ מצאו בסיס B כך ש- $[T]_B$ בצורה קנונית.

<u>פתרון:</u> חישוב מראה ש- $P_A(x)=x^4-1$. לכן הע"ע $1,-1,i,-i$

נמצא מ"ע של $1,-1$:

$$M_1=\dots=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=sp\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\leftarrow v_1$$

$$M_{-1}=\dots=sp\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}=sp\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\-1/\sqrt2\\1/\sqrt2\end{pmatrix}\right\}\leftarrow v_2$$

$(v_1,v_2)=0$ שווקטורים אלה ניצבים, כי מע"ע שונים. לכן יהיו תחילת הבסיס האו"נ שנבנה.

כעת נטפל ב- $\lambda=i$. נחפש לצורה ~~וקטור~~ וקטור $u+iv$, $u,v\in\mathbb{R}^4$

כך ש- $A(u+iv)=i(u+iv)$.

פותרים את המערכת $Av=iv$ ומקבלים שהוקטור

$v=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\\i\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא ו"ע של $T_A^{\mathbb{C}}$ עם ע"ע i.

לכן לפי התזכורת $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ הם כרגע להמשך האנכיות האורתוג', ופורשים ת"מ של V דו מימדי T אינו').

ננרמל ונסמן $v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\ \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$, $v_4=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\\0\\0\end{pmatrix}$

וכעת אם נסמן $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ נקבל

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&0&1\\&&-1&0\end{pmatrix}$$

$\lambda=\alpha+i\beta$

במקרה זה $\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{bmatrix}$, $\lambda=0+1\cdot i$, לכן זה מה שיצא.

מטריצה אחרת...

<u>פתרון ללא האלגוריתם:</u>

אורתוג' $\det=-1\Rightarrow$ הצורה הקנונית היא $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&\\ \sin\theta&\cos\theta&\\&&-1\end{pmatrix}$ ולכן -1 ע"ע

מחשבים ורואים ש- $v_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$ נחשב את $U=Sp\{v_1\}^\perp$

חישוב מראה שבסיס או"נ ל- U נתון ע"י $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\0\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

ואנו יודעים ש- V היא ת"מ T_A-אינו' וש- $T_A|_U$ מט' סיבוב.

נחשב זווית הסיבוב: נחשב בין e_2 לבין Ae_2. היא מקיימת:

$$\cos\theta=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\sqrt3}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$