

תראו 10 חידושים

יחידות קוונטיות ו-1 פונקציות

יהי V מרחב וקטורי מעל F עם $\dim F = n$. באינדיקס i, j של V נרשום δ_{ij} .
 ξ על V , ניתן למצוא בסיס $\{v_1, \dots, v_n\}$ כך של- $[\xi]_B = (\xi(v_1), \dots, \xi(v_n))$ אז כמובן.
 אם יוצאים צברים נוספים על F נוסף צריך יותר.

(I) נניח F סדור אלגברית (ממש) $(F = \mathbb{C})$. אז ניתן למצוא בסיס B כך של- $[\xi]_B = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$
 (II) אם $F = \mathbb{R}$ אז ניתן למצוא בסיס B כך של- $[\xi]_B = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ כמות ה-1 היא מספר הממשי

וכמות ה-1 היא זהה ל-1-ים לא תלוייה בבסיס. $\leftarrow$ נקטאים אינדקס אינרציה.

⚠ המשפט ב-I ו-II נקטאים **הצורה הקנונית של ξ מעל שדה F** .

תרגיל: יהי ξ הפונקציה על F^3 המוגדרת על ידי $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

מצאנו את הצורה הקנונית של ξ ובסיס מתאים: א. כאשר $F = \mathbb{C}$ ב. כאשר $F = \mathbb{R}$.
 פתרון: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ סדר קודמת באינדקס

אז $[\xi]_B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ $\xi(v_1, v_2) = 2, \xi(v_1, v_3) = \frac{1}{2}, \xi(v_2, v_3) = \frac{1}{2}$. נסמן $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1$

$[\xi]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ אז אם $C = \{v_1, v_2, v_3\}$ נקרא של- $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_2, v_3 = v_3$

ב) מעל $\mathbb{R}$ נקרא: $[\xi]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

תרגיל: נגדיר פונקציה ξ על $M_n(\mathbb{R})$ על ידי $\xi(A, B) = \text{tr}(AB)$. מצאנו את הצורה הקנונית של ξ ונקטאים את ξ מנוון.

פתרון: נסמן ב- E_{ij} את המטריצה שבתחתיה j , ו-1, וכל שאר התאים 0.
 הם $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ הם בסיס B של $M_n(\mathbb{R})$ כי $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
 $B = \{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ סדר: $\begin{matrix} \text{Sym} & \text{Asyn} \\ \text{Sym} & \text{Asyn} \end{matrix}$

$\text{tr}(AE_{ii}) = a_{ii}$ אז $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ ו- $E_{ii}E_{jj} = \delta_{ij}E_{ii}$

$\text{tr}(E_{ii}E_{ii}) = \text{tr}(E_{ii}) = 1$ מתקיים $E_{ii}E_{jj} = 0$ עבור $i \neq j$

$\text{tr}((E_{ij} + E_{ji}) \cdot E_{kk}) = (E_{ij} + E_{ji})_{kk} = 0$ כמו כן

$\text{tr}((E_{ij} - E_{ji}) \cdot E_{kk}) = (E_{ij} - E_{ji})_{kk} = 0$ נמשך

$\text{tr}((E_{ij} + E_{ji})^2) = \dots = 2$ $\text{tr}((E_{ij} + E_{ji})(E_{kl} + E_{lk})) = \dots = 0$

$\text{tr}(E_{ij} + E_{ji})(E_{kl} - E_{lk}) = 0$ $\text{tr}((E_{ij} - E_{ji})(E_{kl} - E_{lk})) = \dots = 0$ $(i,j) = (k,l)$ אחרת

$B = \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{array} \right)$ הוא בסיס

אם המטריצה B ופי B הוא בסיס ξ על $M_n(\mathbb{R})$.

חברת חרפיה פנימית (R)

מכונת ירי V מ"ל מ"ל R. פנימי פנימי סטטוס ξ ו V נקרא מוצר חיוסית אק סד (V, ξ) ו $V \neq \emptyset$.

פנימי נזה נקרא זר חרפיה פנימית ו R מופה פנימית קצו"ל מסומנת $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

הכוח (V, $\langle \cdot, \cdot \rangle$) נקרא חרפיה פנימית מ"ל.

אק V מ"ל מ"ל אק (V, $\langle \cdot, \cdot \rangle$) נקרא חרפיה פנימית.

בדוגמאות

$$(1) \text{ מ"ל סטטוסית } \mathbb{R}^k - \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}^k} = \sum_{i=1}^k x_i y_i$$

$$(2) \text{ אק } A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ מ"ל סטטוסית מופה (כומר) } \forall x \quad x^t A x$$

$$\langle u, v \rangle = \langle u, Av \rangle = u^t Av \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_A$$

$$\langle v, u \rangle = \langle v, Au \rangle = v^t Au = (v^t Au)^t = u^t Av \quad (\text{סטטוסית})$$

$$(3) \quad V = C([1, 1]) \text{ ונזיר } \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \langle f, g \rangle$$

$$\langle A, B \rangle = \text{tr} AB \quad \Delta$$

$$(4) \text{ סטטוסית } \langle A, B \rangle = \text{tr} (AB^t) \text{ מ"ל מופה פנימית}$$

$$\text{tr} (AA^t) = \sum_{i=1}^n (AA^t)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} A_{ij}^t = \sum_{i,j} A_{ij}^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{יש שני } A_{ij} = 0$$

$$(5) \text{ נ"ח } V \text{ מ"ל מ"ל מ"ל } B \text{ בס. אק נזה מ"ל } \langle \cdot, \cdot \rangle$$

$$\langle u, v \rangle = \langle [u]_B, [v]_B \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \quad \text{בס. } \{1, x, x^2\}$$

אק א"ל, א זומכסה פנימית?

פמח: בינאריות, סטטוסית, מתקיימים א. כמ"ל סדק, $\langle p, q \rangle$. (נ"ח ז"ל)

$$\langle p, q \rangle = p(-1)^2 + p(0)^2 + p(1)^2 \quad \text{אק א"ל, א זומכסה פנימית?}$$

$$\langle p, q \rangle = 0 \Leftrightarrow p(-1) = p(0) = p(1) = 0$$

אק א"ל, א זומכסה פנימית? $\langle p, q \rangle = 0$ $\Leftrightarrow p(-1) = p(0) = p(1) = 0$

אק א"ל, א זומכסה פנימית? $\langle p, q \rangle = 0$ $\Leftrightarrow p(-1) = p(0) = p(1) = 0$

אק א"ל, א זומכסה פנימית?

המונח מרחב סגור

הכנסתם: אם $(v, \cdot)$ מט"ם קציר את ה**נורמה** של $v \in V$ " $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

② $v, u \in V$ נקראים **אורתוגונליים** אם $\langle u, v \rangle = 0$.

③ " **אורתונורמליים** אם $\langle u, v \rangle = \delta_{ij}$ (כאן $\delta_{ij} = 1$ אם $i=j$ ו-0 אחרת).

סדרת וקטורים (היותם **אורתונורמליים**)
 $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

אורתונורמליים או תזונה-ית אם רק $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

היותם שסדרה א"ל היא בסיס, וכן סדרה $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס א"ל של V אם

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle \cdot v_i \quad v \in V$$

בטענה: $C(E, \mathbb{R})$ עם מט"ם $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f g dx$ אם f זדית-גאלי-זוית.

אז f, g אורתונורמליים.

תהליך גרם-שמידט: נניח $\{v_1, \dots, v_m\}$ סדרה סגורה במט"ם V . קציר

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} \cdot u_i \quad (k > 1 \text{ קציר})$$

$w_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$ נרמט ונקב סדרה אורתונורמלית. קציר

$$\text{Sp} \{v_1, \dots, v_k\} = \text{Sp} \{u_1, \dots, u_k\} = \text{Sp} \{w_1, \dots, w_k\} \quad 1 \leq k \leq m \text{ מתקיים}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V = \mathbb{R}^3 \quad \text{בטענה}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_1 = v_1 \quad \text{(כאן)}$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \dots = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{הסדרה } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ א"ל. נרמט ונקב סדרה א"ל.}$$

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

בטענה: $R_2(X) = V$ (בבסיס תהליך) GS סגור $v_1=1, v_2=x, v_3=x^2$ סגור ה**מספר**

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx \quad \text{הפנייה, "}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \quad u_1 = x - \int_{-1}^1 x dx = x \quad \text{(כאן)}$$