

דינאמיקת תרגום 9

פונקציות בינאריות

המרחב הבינארי:

הצורה: יהי V מ"ל מעל שדה F . נתון F -כמו מעל עצמו. פונקציות בינאריות

על V זו העתקה $\psi: V \rightarrow F$. המרחב הבינארי הוא $\{\psi: V \rightarrow F \mid \psi \text{ פונקציה בינארית}\}$

דוגמאות:

1. $\psi = 0$

2. $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ אם נקבע $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ אזי $\psi(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$

3. $([0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$ מרחב הפונ' הריבועית $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. אז ההתאמה $f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$

הצורה: יהי $v_1, \dots, v_n$ בסיס של V . נבחר פונ' $\delta_1, \dots, \delta_n$: $\delta_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$\delta_1, \dots, \delta_n$ נקראים הבסיס הדואלי ל- $v_1, \dots, v_n$.

טענה: $\delta_1, \dots, \delta_n$ אכן בסיס. (הוכחה)

אם תצטרף - נ"ח $\psi = \alpha_1 \delta_1 + \dots + \alpha_n \delta_n$ (פעולת שני הטורים על v_i ונקבל $\delta_i(v_i) = 1$ ו- $\delta_j(v_i) = 0$ כתיבה

כתיבה - יהי $\psi: V \rightarrow F$ פונק' בינארית. נראה ש- $\psi = \sum_{i=1}^n \psi(v_i) \delta_i$. מספיק לבדוק שהשיוון מתקיים על איברי הבסיס $v_1, \dots, v_n$ ולהראות קל.

פונקציות בינאריות

הצורה: יהי V מ"ל מעל שדה F עם $\text{char } F \neq 2$. פונק' בינארית על V זו

העתקה $\xi: V \times V \rightarrow F$ המקיימת סימטריות

פונק' בינארית ξ נקרא סימטרי אם $\xi(u, v) = \xi(v, u) \forall u, v$.

אנטי סימטרי $\xi(u, v) = -\xi(v, u)$

דוגמאות:

1. $F = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$. $\xi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2$. זהו טורן פונק' בינארי.

2. $A \in M_n(F)$ מטריצה פונ' בסי' ξ_A על F^n : $\xi_A(u, v) = u^t A v$.

מתקיים $\xi(e_i, e_j) = e_i^t A e_j = e_i^t \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} = a_{ji}$

③ הפתרון היחיד $T: V \rightarrow V^*$ נקבעת על ידי ξ_T :

$$\xi_T(u, v) = (T(u))(v) \quad \text{כך אכן ביטוי זה}$$

הערה: יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V , ξ פורמ ביז' המטריות

$$[\xi]_B = (\xi(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{המטריצה של } \xi \text{ לפי } B$$

$$\Delta \text{ הפה} - \text{על } u, v \in V \text{ מתקיים } \xi(u, v) = [u]_B^T [\xi]_B [v]_B$$

$$\xi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1 \quad \text{ע"פ } \xi \in L(F^3)$$

$$\text{נניח } A \in M_3(F) \text{ ו- } p \text{ ש-} \xi(u, v) = u^T A v \quad \text{על } u, v \in F^3 \text{ ונקוד}$$

אם ξ סימטרית

$$[\xi]_E = (\xi(e_i, e_j)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : F \quad \text{פירוק: נניח } E \text{ את הבסיס הסטנדרטי של } F$$

$$\xi(u, v) = [u]_E^T [\xi]_E [v]_E = u^T [\xi]_E v \quad \text{ואכן } [\xi]_E \text{ מטריצה כדורית. היא סימטרית}$$

ואכן ξ סימטרית

Δ יהי ξ פורמ ביז' על V , ויהיו B, C בסיסים של V . מה הקשר

$$\text{בין } [\xi]_B \text{ ו- } [\xi]_C?$$

$$\text{הן } [\xi]_B \text{ ו- } [\xi]_C \text{ מתקבלות מ- } P \text{ הפיכה קו } P$$

$$\text{הערה: ידוע שיש } u, v \in V \text{ כך } \xi(u, v) = [u]_B^T [\xi]_B [v]_B \quad \text{נניח } P = [C]_B^C$$

$$\begin{aligned} \xi(u, v) &= ([u]_B)^T [\xi]_B [v]_B = P [u]_C^T [\xi]_B P [v]_C = P [u]_C^T P^T [\xi]_B P [v]_C \\ &= [u]_C^T P^T [\xi]_B P [v]_C = [u]_C^T [\xi]_C [v]_C \end{aligned}$$

$$C = \{u_1, \dots, u_n\} \quad \text{נניח}$$

לכונן של פורמ ביז' סימטרית

משפט: יהי ξ פורמ ביז' סימטרית. אז קיימים בסיס של V ש- $[\xi]$ אלכסונית.

הערה: אם L ת"פ נקבע את המסופס של L ביחס ל- ξ ע"י

$$L_{\xi} = \{u \in V \mid \xi(u, v) = 0 \forall v \in V\}$$

הערה: נתונה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ב- F^3 קיים בסיס אלכסונית.

נתון מטריצה וקטור u ש- $\xi(u, u) \neq 0$. אפשר לחרו $u = e_2$.

$$L = \text{span}\{e_1, e_3\} \quad \text{נניח}$$

החומר תרגומי 9 מ נחרת:

$$L_{\perp \gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid (x_1, x_2, x_3) A e_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\} = \dots = S_p = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מתקיים: $v_2 \uparrow \quad v_3 \uparrow$

הוכחתם ברתה ו- $L_{\perp \gamma} \oplus L = F^3$. כלל (תמוך) ב- $\{L_{\perp \gamma}\}$

$$[\{L_{\perp \gamma}\}]_{\{v_2, v_3\}} = \begin{pmatrix} 3(v_2, v_2) & 3(v_2, v_3) \\ 3(v_3, v_2) & 3(v_3, v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\xi]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_k \quad B = \{v_1, v_2, v_3\}$$

תבניות ריבועיות

הצורה: $Q: V \rightarrow F$ נקראת תבנית ריבועית אם יש פנ' בינימלי

$$Q(v) = \xi(v, v) \quad \text{כך ו-} \quad Q(v) = \xi(v, v)$$

⊗ והטון ברתה רי נט תבנית ריבועית יש פנ' בינימלי סימטרי יחיד ξ

$$\text{כך ו-} \quad \forall v \in V \quad Q(v) = \xi(v, v)$$

⊗ כנו כן תחתון ברתה רי נט תבנית ריבועית F^n היא מהצורה:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j$$

$$Q(x) = x^t A x \quad \text{המטריצה המתאימה לתבנית זו מוצגת להלן} \quad A = (a_{ij}) \quad \text{מתקיים,}$$

אנאזה תם לזכרון תבנית ריבועיות:

$$Q = x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_2^2 \quad \text{תבנית ריבועית}$$

כתבו את המט' A המתאימה ל- Q ונצוו מט' הפירה H ק ו- $H^t A H$ אכזבני

$$Q = x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 6x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 6x_2^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$Q = y_1^2 - 6y_2^2 \quad \text{כך ו-} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{כך ו-} \quad \begin{matrix} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{matrix}$$

$$\text{כך ו-} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{כך ו-} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q(Hy) = y^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} y \quad \text{כך ו-} \quad Q(x) = Q(Hy) = y^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} y$$

$$Q(Hy) = Q(HH^{-1}y) = (H^{-1}y)^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} H^{-1}y = y^t (H^{-1})^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} H^{-1}y$$

$$Q(y) = y^t A y \quad \text{כך ו-} \quad (H^{-1})^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$H^t A H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{כך ו-}$$

Q -5 הנתונה A היא $Q = 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$

(תונה)

ה-1 H השמה כך -ש. $H^t A H$ סכמית.

$$Q = x_2^2 + 2x_2(x_1 + \frac{1}{2}x_3) + x_3^2 = x_2^2 + 2x_2(x_1 + \frac{1}{2}x_3) + (x_1 + \frac{1}{2}x_3)^2 - (x_1 + \frac{1}{2})^2 x_3$$

$$= \underbrace{(x_2 + x_1 + \frac{1}{2}x_3)^2}_{y_2} - \underbrace{x_1^2}_{y_1} - x_1x_3 + \underbrace{\frac{3}{4}x_3^2}_{y_3}$$

$$= y_2^2 - y_1^2 + y_1y_3 + \frac{3}{4}y_3^2 \quad . - -$$