

תרגוי מיוחד 8

חזית בסים צ'ונדן

נניח $T: V \rightarrow V$ ט"ל, עם ע"ל λ . חזים מצאנו את החזק הסטנדרטית (המקסימלית) λ .

שלב 1: חשבים את שפת הדיונים: $0 \in \underbrace{\ker(T-\lambda I)}_{M^1} \oplus \dots \oplus \underbrace{\ker(T-\lambda I)^k}_{M^k} = \underbrace{\ker(T-\lambda I)^{k+1}}_{M^{k+1}}$

שלב 2: משנים סיסם של M^{k-1} סטס של M^k . (נניח שיש לנו v_1, v_2, v_3 ושלמה רב).

שלב 3: מנסים את $T-\lambda I$ על v_1, v_2, v_3 . $(T-\lambda I)v_i \in M^{k-1}/M^{k-2}$.

שלב 4: נותנים בסיס B של M^{k-2} , ומשנים את $\{v_1, \dots, v_{k-2}\}$ בסיס של M^{k-1} .

נניח כי $u_1, \dots, u_4$ השלמה רב.

שלב 5: מנסים $T-\lambda I$ על $(T-\lambda I)v_1, (T-\lambda I)v_2, (T-\lambda I)v_3, u_1, \dots, u_4$

מקבלים וקטורים חדשים השייכים ל- M^{k-2} .

שלב 6: חוזרים על שלב 3 עבור M^{k-3} .

ממשיכים כך עד שמצאנו הומומורפיזם של היסוד M^1 של M^1 .

⚠️ $v, (T-\lambda I)v, \dots, (T-\lambda I)^{k-1}v$ וזו בסיס צ'ונדן $\mathcal{B}_k(\lambda)$ כי:

$$T((T-\lambda I)^j v) = ((T-\lambda I) + \lambda I)(T-\lambda I)^j v = (T-\lambda I)^{j+1} v + \lambda (T-\lambda I)^j v$$

אם A מט' מסדר n ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס צ'ונדן (כאשר מסדרים את $v_1, \dots, v_n$ לפי

סדר ההפעה של $T-\lambda I$ עליהם, מהומומורפיזם של היסוד M^1 של M^1

הצורה הבאה, טוב עבור הניח למטה נמצאה וקרהוה).

$$P^{-1}AP = J \quad \text{כאן} \quad P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

צורת היסוד.

תוצאה: יהי $A \in M(\mathbb{C})$ עם ע"ל יחיד λ , ונניח ש- $r_k(A-\lambda) = n-1$. הלאו שלמות צ'ונדן

של A היא $J_n(\lambda)$.

* הריקוי המלאומי של $\lambda = n - r_k(A-\lambda) = n - (n-1) = 1$ מט' הבסיס השייכים λ .

מאחר ו- λ הוא הע"ל היחיד, וישיר בסיס אחדותי, צורת צ'ונדן היא $J_n(\lambda)$.

תרגיל 1: תהי $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, סגורות על ידי λ ולכן λ הוא ערך עצמי של A ושל B .

נניח $(A - \lambda I)^2 \neq 0$ ו- $(B - \lambda I)^2 \neq 0$. (הנניח שהם לא מתאפסים).

* אם $n=3$ אז A, B צמודות.

* אם $n=4$ אז A, B צמודות.

פתרון:

* ר"ק' ע"אונסטי $= 3$ יש 3 ערכים. והנניח $(A - \lambda I)^2$ אינו שווה לאפס. אז $(A - \lambda I)^3 = 0$.

נבחר $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ו- $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ שניהם!

* נכון רק אם $(A - \lambda I)^3 = 0$ ו- $(B - \lambda I)^3 = 0$.

תרגיל 2: הראו ש- $A^t \sim A$, $A \in M_n(\mathbb{C})$.

נבחר $A = J_n(\lambda)$. נראה ש- $J_n(\lambda)^t \sim J_n(\lambda)$.
 $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ אז $P^{-1} = P$ כי $P = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & & \ddots \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$ אז $P^2 = I$.

כמו כן: $P^{-1} J_n(\lambda) P = P J_n(\lambda) P = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & & \ddots \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & & \ddots \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$

כלומר תהי A בסיס. ונניח $J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) \\ \vdots \\ J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$ צורת ה'ורדן של A .

תהי P_i מט' כך ש- $P_i^{-1} J_{n_i}(\lambda_i) P_i = J_{n_i}^t(\lambda_i)$ (כמו).

אז $P^{-1} J P = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & P_r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) \\ \vdots \\ J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} J_{n_1}(\lambda_1) P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_r^{-1} J_{n_r}(\lambda_r) P_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{n_1}^t(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r}^t(\lambda_r) \end{pmatrix} = J^t$

וקיבלנו $J^t \sim J \sim A^t$ (הנניח שהם שווים).

נבחר את צורת ה'ורדן: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ אז $P_B(x) = (x-2)^2(x+2)^2$.

כמו כן $N(-2I+B) \neq N(-2I+B)^2 = N(-2I+A)$, $N(2I+B) \neq N(2I+B)^2 = N(2I+A)$.

אז יש בערך 2 ערכים אחרים. אז צורת ה'ורדן היא

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \\ & & -2 \\ & & & -2 \end{pmatrix}$