תרגול לינארית 7:

<u>הגדרה:</u> $T:V\to V$ נקראת נילפוטנטית אם קיים p כך ש- $T\circ\dots\circ T = T^p = 0$

ה- p המינימלי נקרא אינדקס נילפוטנטיות.

<u>נזכר במשפט מהרצאה:</u>

$T:V\to V$, אז $M^i=\ker T^i$, $N^i=\mathrm{Im}T^i$

הם מוכלים (ממש) עד שמתייצבים ב- k, $V=M^k\oplus N^k$, $T|_{M^k}:M^k\to M^k$ נילפ' $T|_{N^k}$ הפיכה

לכן יש פירוק $T=T_1\oplus T_2$ כך ש- T_1 נילפ', T_2 הפיכה.

<u>דוגמא:</u> $T_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ע"י $T_AV=AV$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&1\\1&2&1\end{pmatrix}$

מחשבים: $A^2=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ $A^3=\begin{pmatrix}0&-4&4\\0&4&4\\0&4&4\end{pmatrix}$

אנו רואים ש- $N(A)\subsetneq N(A^2)=N(A^3)$ ולכן $0\subsetneq\ker T_A\subsetneq\ker T_A^2=\ker T_A^3=\dots$

$\mathbb{R}^3\supsetneq\mathrm{Im}T_A\supsetneq\mathrm{Im}T_A^2=\mathrm{Im}T_A^3\dots$

נמצא בסיס ל- $\ker T_A^2$:

$$\ker T_A^2=N(A^2)=N\begin{pmatrix}0&-2&-2\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}=Sp\{\overbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}^{B_1}\}$$

בסיס ל- $\mathrm{Im}T_A^2$ נתון ע"י הווקטור ~~לכי הבא פורש את מרחב~~ מאחר ו- $\mathbb{R}^3=\ker T_A^2\oplus\mathrm{Im}T_A^2$

$$\mathrm{Im}T_A^2=Sp\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\}$$

$$B=\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$$

B בסיס של $\mathbb{R}^3$ $\quad [T_A]_B^B=[Id]_B^E[T_A]_E^E[Id]_E^B$

$$=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1&1/2&1/2\\0&1/2&1/2\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[T|_{N^2}]_{B_2}&\\&[T|_{M^2}]_{B_1}\end{pmatrix}$$

<u>תרגיל:</u> אם $\dim V=n$ ו- $T:V\to V$ נילפ'. אז $T^n=0$.

ישנו k כך ש- $\ker T\dots\subseteq\ker T^{k-1}\subseteq\ker T^k=\ker T^{k+1}=\dots$

מאחר ו- T נילפ', $\ker T^k=V$. אם $k\le n$ סיימנו כי $T^n=T^{n-k}\circ T^k=0$

~~אחרת~~ ומתקיים $n\ge\dim\ker T^k\ge k$ לכן סיימנו $\square$

<u>תרגיל:</u> יהי λ ע"ע של $T:V\to V$. אז קיים פירוק $T=S\oplus R$ כאשר λ הע"ע היחיד של S ו- λ אינו ע"ע של R.

פתרון

פתרון: נתבונן בהעתקה $T-\lambda I$. מהמשפט קיימים תת מרחבים $T-\lambda I$ אינו׳ U,W כך ש- $(T-\lambda I)|_U$ נילפ׳ ו- $(T-\lambda I)|_W$ הפיכה.

כאשר 0 הוא הע״ע היחיד של $(T-\lambda I)|_U = T|_U - \lambda I|_U$ (ולכן λ הוא הע״ע היחיד של $T|_U$). 0 אינו ע״ע של $(T-\lambda I)|_W = T|_W - \lambda I|_W$ כלומר λ אינו ע״ע של $T|_W$.

הסבר: μ ע״ע של T $\Leftrightarrow$ 0 ע״ע של $T-\mu I$.

אכן אם μ ע״ע של T אז קיים $0\neq v\in V$ כך ש- $Tv=\mu v$ ולכן $(T-\mu I)v=0$ כלומר v ו״ע של $T-\mu I$.

הכיוון ההפוך דומה. לכן במקרה שלנו μ ע״ע של $T|_U$ $\Leftrightarrow$ 0 ע״ע $T|_U-\mu I|_U$

הסבר מסודר ומפורט במבוא.

צורת ז׳ורדן:

אם $A\in M_{n\times n}(F)$ ו- p_A מתפרק לגורמים ליניאריים מעל F אז קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP$ מט׳ ז׳ורדן (נקראת צורת ז׳ורדן של A). יתרה מזאת:

שתי מטריצות הן דומות $\Leftrightarrow$ יש להן אותה צורת ז׳ורדן.

(א) איברי האלכסון הם הע״ע, ואורך הבלוק הוא הריבוי האלגברי (מס׳ המופעים)

(ב) המספר k שמייצב את ~~M~~ $\ker(T-\lambda I)^k$ שווה לגודל הבלוק הגדול ביותר, של λ.

(ג) לכל $k\geq 1$: $\dim\ker(T-\lambda I)^k - \dim\ker(T-\lambda I)^{k-1}$ שווה למספר הבלוקים בגודל לפחות k השייכים ל- λ.

(3) מס׳ הבלוקים השייכים ל-λ זה הריבוי הגיאומטרי של λ.

תרגיל: $A\in M_3(F)$ נילפוטנטית. הראו שהריבוי הגיאומטרי של 0 קובע את צורת ז׳ורדן של A

פתרון: נסמן ב- r את הריבוי הגיאומטרי של 0.

אם $r=1$ אז יש בלוק ז׳ורדן אחד ולכן $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$r=2$: $J=\left(\begin{array}{cc|c}0&1&0\\0&0&0\\\hline 0&0&0\end{array}\right)$, $r=3$ - $J=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

המשך [illegible] לינארית:

<u>תרגיל:</u> מצוא בסיס וצורת ז'ורדן עבור $M_{5\times5}(\mathbb{C}) \ni A = \begin{pmatrix} 0&1&1&0&1\\ 0&0&1&1&1\\ &&0&& \end{pmatrix}$

<u>פתרון:</u> נבדוק ישירה מראה ש- $A^2 \neq 0$, $A^3=0$ ולכן ישנן שרשראות

$$0 \neq N(A) \subsetneq N(A^2) \subsetneq N(A^3) = \mathbb{C}^5$$

<u>שלב א':</u> משלים השלמה של בסיס של $N(A^2)$ לבסיס של $N(A^3)$.

נחשב את $N(A^2)$: $N(A^2) = = \ldots = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ולכן $v_1 = e_4$ משלים לבסיס.

<u>כעת נסמן:</u> $N(A^2) \ni v_2 = Av_1 = Ae_4 = e_2$

עלינו להשלים את $v_2 \cup \{$בסיס של $N(A)\}$ לבסיס של $N(A^2)$.

בסיס של $N(A)$ נתון ע"י $B_1 = \{e_1, e_2-e_3+e_4, -e_3+e_5\}$

כעת $\{v_2\} \cup B_1$ כבר בסיס של $N(A^2)$ ולכן אין וק' נוסף משלב זה (קומה 2).

נסמן $N(A) \ni v_3 = A^2 v_1 = e_1$

וצריך להשלים את e_1 לבסיס של $N(A)$. והוקטור

$v_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$v_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

נרשום את ההשלמה הרצויה

לכן הבסיס $\{v_3, v_2, v_1, v_4, v_5\}$ הוא בסיס ז'ורדן ומתקיים

$$[T_A]_B^B = \begin{bmatrix} 0&1&0&&\\ &0&1&&\\ &&0&&\\ &&&0&\\ &&&&0 \end{bmatrix}$$