

תורת המרחב ויניציות 6

כמונים ישרים, תתי מרחב איננו יאנוס כי הם צבועים ביום ישר של התחנות

טענה: יהי V מ"ו, $U_1, \dots, U_k$ תתי מרחב. אז התנאים הבאים שקולים:

(א) $U_i \subseteq U_j$ $1 \leq i < j \leq k$ אינדקסים שונים! $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_k$ וקטורים שונים מאפס,

אז $U_1, \dots, U_k$ שונים מזה וזה

(ב) אם $B_1, \dots, B_k$ בסיסים של $U_1, \dots, U_k$ קהטומה, אז B_i בסיס קבוצות

$$B = \bigcup_{i=1}^k B_i \quad \text{מהווה בסיס של} \quad \sum_{i=1}^k U_i$$

$$\dim(\sum_{i=1}^k U_i) = \sum_{i=1}^k \dim U_i \quad (c)$$

הצדקה: אם התנאי מתקיימים אז אנוסים שהכנסו הוא סכום ישר

$$\sum_{i=1}^k U_i = \bigoplus_{i=1}^k U_i \quad \text{מכאן}$$

הוכחת הטענה:

(א) $\Leftrightarrow$ (ב): יהי $B_i = \{v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}\}$ בסיס של U_i . הרי

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} v_{ij} = 0 \quad (\alpha_{ij} \in F)$$

נבדוק של B בת"ז: נניח שיש תווית זיגורית

$$\sum_{i=1}^k v_i = 0 \quad \text{אז} \quad v_i = \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} v_{ij}$$

אם $v_i = 0$ אז מאי התזות של איברי B_i נקבע $\alpha_{ij} = 0$ לכל $1 \leq j \leq k_i$

אכן אם $v_i \neq 0$ נקבע $\alpha_{ij} = 0$ כנמצא מאפס וס"מנו.

נניח כשנמצא שאם $v_i \neq 0$ ומהאפס יהיו $\alpha_{ij} \neq 0$ האינדקסים של v_i אז:

$$\sum_{i=1}^k v_i = \sum_{i=1}^m v_{e_i} \quad \text{מכאן} \quad v_{e_j} \neq 0 \quad \text{ושייכים} \quad v_{e_j} \in v_{e_j}, \quad \text{נקבע}$$

מהנחתנו באל של $v_{e_1}, \dots, v_{e_m}$ בת"ז, הסתירה $\exists$.

הם בסיס קבוצות כי אחרת אם היה $v_{e_2} = v_{e_1}$ היינו זקוקים $v_{e_2} = v_{e_1} + 0 \cdot v_{e_2} = v_{e_1}$ ומקבלים תזות

(ב) $\Leftrightarrow$ (c): נבחר B_i בסיס של U_i . (כאן) $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$

$$\dim \sum_{i=1}^k U_i = |B| = |\bigcup_{i=1}^k B_i| = \sum_{i=1}^k |B_i| = \sum_{i=1}^k \dim U_i \quad \text{אז}$$

B_i בסיס קבוצות B בסיס של $\sum U_i$

(c) $\Leftrightarrow$ (d): יהי B_i בסיס של U_i . (ראה שהקה B_i בסיס קבוצות ושל $B = \bigcup B_i$ בסיס של

$$\dim(\sum_{i=1}^k U_i) \stackrel{(1)}{=} |B| = |\bigcup_{i=1}^k B_i| \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^k |B_i| = \sum_{i=1}^k \dim U_i \quad \text{מכאן}$$

אם B_i בסיס קבוצות נקבע שהם שונים (וכן נקבע שהם שונים).

אם B איננה בסיס אז נקבע שאם (2) הוא חזק ושם סתירה

המשך $\leftarrow$

המשך

(ק) $\leq$ (ט): יהיו $v_1, \dots, v_n$ כמו קודם. נשים את v_i במקום B_{v_i} של V_i . מרחב (ק) נקרא B . יהיו $v_1, \dots, v_n$ כמו קודם. נשים את v_i במקום B_{v_i} של V_i . מרחב (ק) נקרא B .

תתי-מרחב אינורטנטים ביחס לרשתה

תצבורת: תהי $T: V \rightarrow V$ ט"ל. תת-מרחב $W \subseteq V$ נקרא אינורטנט אם $T(W) \subseteq W$. במקרה כזה נקרא העתקה T נאמית $W \rightarrow W$.

בדוגמה

1) אם T נש T , אז M_T ת"מ T -אינו' (העצם M_T הוא T -אינורטנט).

2) תהי $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ מט' סיבוב θ מעטפת סביב ציר z .



$$M_T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אז $\{e_1, e_2\}$ ו- e_3 ימישן (צא) הוא ת"מ T -אינו'.

ואם $\{e_1, e_2\}$ (ציר z) הוא ת"מ T -אינו'.

3) $\text{Ker } T$, $\text{Im } T$ הם תתי-מרחב T -אינו'.

תכונות: תהי $T: V \rightarrow V$ ט"ל. $W \subseteq V$ ת"מ T -אינו'. והטו של T לכנסו

אז גם $W \rightarrow W$ $T|_W$ לכנסו

סתובב: יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ העצם השונים של T . לאחר-ו- T לכנסו מתקיים ש-

$$V = \bigoplus_{i=1}^k M_{\alpha_i} \quad \text{נכזה צהיח} \quad W = \sum_{i=1}^k W \cap M_{\alpha_i} \quad \text{(כי צהיח צנו- W של תנע)}$$

של $W \cap M_{\alpha_i}$ ואז נקרא בסם של W המורכב מוקטורים עצמיים של $T|_W$.

(ההפכה $\subseteq$ ברורה (כי $W \cap M_{\alpha_i} \subseteq W$ $\forall i$)

נכזה צהיח של $W \subseteq V$ אם $W = W_1 + \dots + W_k$ כאשר $W_i \subseteq M_{\alpha_i}$ אזי $W \subseteq V$ $\forall i$.

הוסבר אינורטנטים: אם $W = W_1 + \dots + W_k$ אזי $W \subseteq V$ $\forall i$ $W_i \subseteq M_{\alpha_i}$ $W \subseteq V$

$$W = W_1 + W_2 \quad \text{אם} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 \quad \text{(סעס T ונקב):}$$

$$Tw = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$$

$$Tw = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$$

$$Tw - \alpha_1 w = (\alpha_2 - \alpha_1) w_2$$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 - \alpha_1 \neq 0 \Leftrightarrow w_2 \in W \Leftrightarrow w_1 = w - w_2 \in W$$

סל מספר המוקטורים.

החומר תרגום 6 מנצחית

המשך התכנית:

$(V_i \in M_n) \quad w = V_1 + \dots + V_m$

$\text{pk } \overset{w}{\cancel{\lambda}} \in W$ bse m s' דאס ווארטן פארמאגט אן איינציקע וועג צו קומען צו וואס מען האט געזאגט.

i d's $V_i \in W$.

1=חז - כאינו מהסבר (סליטות) י.

$$W = V_1 + \dots + V_m$$

נ.ח. שותטסנה נכונה - א-מ ונוכח - מ. 'ה'

$$(1510) - \begin{cases} T_w = \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_m V_m \\ \lambda_1 W = \lambda_1 V_1 + \dots + (\lambda_1 + \lambda_m) V_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow (T - \lambda_1) \underset{W}{w} = (\lambda_2 - \lambda_1) \underset{W}{v_2} + \dots + \lambda_m \underset{W}{v_m} = 0$$

Two paths γ, η is $\leftarrow V_2, \dots, V_n \in W$ for $1 \leq i$ or $\gamma_i \neq \eta_i$ for all i

אז $W \ni V_1$ כנראה $\Leftarrow$ יש פסגה W $\Leftarrow W \Leftarrow T|w$ וכל כיוון

$W = \bigoplus_{i=1}^k (M_{n_i} \cap W)$ זה 'j'k T $W \subseteq V$, $V = \bigoplus M_{n_i}$ הוכחה 

כ) סמליות כזו: צג לא ניתן $p \mid \theta$ $V = \Theta V_i$ (הו"ו ת"נ כשורה)

W = -1 - WSEV ח' פשוטו כ

$$W = \text{span}\{e_1 + e_2\}, \quad V_2 = \text{span}\{e_2\}, \quad V_1 = \text{span}\{e_1\} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Int}(\mathbb{R})$$

Q/c $V = V_1 \oplus V_2$ J/c

סכום יושר של הסתקת ע'נארים:

הסדרה: יהי V מ"ו, ויהיו u, v תתי מרחב קן של W ו- $u \perp v$.

תהייה $R: u \rightarrow v$, $S: w \rightarrow w$, S'' , T' :
 $T(u+w) = Ru + Sw$: "8 $T: V \rightarrow V$

$T = R \oplus S$: מרחב T מודגרת (הטק) וזיגורית, ויוקטור (הסלר) הישר R של S . נחמיה :

3. $V = U \oplus W$ נכון U, W שני תת-חלליות של V ו- $V = U \oplus W$ נכון.

כמו כן $\mathcal{U}, \mathcal{W} \vdash \mathcal{U}$. (נקס) העתקות: $\mathcal{U}_\mathcal{U}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, $\mathcal{U}_\mathcal{W}: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$.

$$T = T|_U \oplus T|_W$$

$$(T|_W \oplus T|_U)(u+v) = T(u+v) = Tw + Tu = T|_W(u) + T|_U(u) = T|_W(u) + T|_U(u) = T|_W(u) + T|_U(u) = T|_W(u) + T|_U(u)$$

מה ניתן להדיר את מסריה מ"צת $\frac{2}{3}$

$B = \{u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_k\}$ של $W \in \text{קבוצה}$, $B_W = \{w_1, \dots, w_k\}$, $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ קבוצת U

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} [T]_{B_U} & 0 \\ 0 & [T]_{B_W} \end{pmatrix}$$
 וכן כתיב את $[T]_B^B$ ונקרא:

$[T]_B^B$
 הפונקטור T מוגדר על ידי $Tu_i = du_1 + \dots + du_n + \omega_{i,1} + \dots + \omega_{i,n}$
 וכן $Tu_i \in U$ אבל $[Tu_i]_B = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \\ 0 \end{pmatrix}$
 באותו אופן, לכל $1 \leq i \leq n$, $[Tu_i]_B = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \\ 0 \end{pmatrix}$ וקייבנו בדיוק את מסתברת הכוללת והדוקטור.

האופן שבו 'ותר' $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ (הם מסתברת בוקרס שהם (M, A, V_i))

תוצאות של תורת הומומורפיזם

תוצאה 1: אם V היא מרחב וקטורי n -ממדי, אז $V \cong \mathbb{C}^n$.

תוצאה 2: אם V היא מרחב וקטורי n -ממדי, אז $V \cong \mathbb{C}^n$.

תוצאה 3: אם V היא מרחב וקטורי n -ממדי, אז $V \cong \mathbb{C}^n$.

תוצאה 4: אם V היא מרחב וקטורי n -ממדי, אז $V \cong \mathbb{C}^n$.

תוצאה 5: אם V היא מרחב וקטורי n -ממדי, אז $V \cong \mathbb{C}^n$.

תוצאה 6: אם V היא מרחב וקטורי n -ממדי, אז $V \cong \mathbb{C}^n$.

תוצאה 7: אם V היא מרחב וקטורי n -ממדי, אז $V \cong \mathbb{C}^n$.

תוצאה 8: אם V היא מרחב וקטורי n -ממדי, אז $V \cong \mathbb{C}^n$.

תוצאה 9: אם V היא מרחב וקטורי n -ממדי, אז $V \cong \mathbb{C}^n$.

תוצאה 10: אם V היא מרחב וקטורי n -ממדי, אז $V \cong \mathbb{C}^n$.

תוצאה 11: אם V היא מרחב וקטורי n -ממדי, אז $V \cong \mathbb{C}^n$.

תוצאה 12: אם V היא מרחב וקטורי n -ממדי, אז $V \cong \mathbb{C}^n$.