

תרגול 4 דינמיות

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, סכום מטריצות:

הצורה: תהי $A \in M_n(F)$ ויהי $\lambda \in F$. λ ערך עצמי של A אם $0 \neq v \in F^n$

כ- $Av = \lambda v$. וקטור v כזה נקרא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ .

$$N(A) = \{v \in F^n \mid Av = \lambda v\} = \{v \in F^n \mid (A - \lambda I)v = 0\}$$

$$N(A) = \ker(A - \lambda I)$$

זהו תת מרחב של F^n הנקרא תת מרחב העצמי של A השייך ל- λ .

זהו התהליך הפרטי של מה שיהיה קשור, סוגי $v \in F^n$, $T = T_A: F^n \rightarrow F^n$ כאשר

$$T_A(v) = Av$$

הצורה: נאמר ש- A נכנסת אם יש בסיס של F^n העומק אטום של A .

תשובות

תהי $A \in M_n(F)$ ונניח ש- A נכנסת, סומריים נאמר q ש- $A^k = 0$. הסיוע שלם

$\lambda \in F$ ע"ש A אז $\lambda = 0$. הסיוע שלם A נכנסת אז $A = 0$.

פתרון: נניח ש- λ ע"ש A . יהי v ו"ע השייך ל- λ , כל $Av = \lambda v$.

$$0 = 0v = A^k v = \lambda^k v$$

$$\text{אבל } v \neq 0 \text{ ולכן } \lambda^k = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

כעת נניח בנפרד ש- A נכנסת. כל שיש v בסיס: $\{v_1, \dots, v_n\}$. מתקיים:

$$Av_i = 0 \cdot v_i = 0$$

תשובה: תהי $A \in M_n(F)$ ונניח ש- A נכנסת. $c \in F$. האם c ע"ש A ? $\forall i: \sum_{j=1}^n a_{ij} = c$

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{פתרון: נניח } v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ אז}$$

אכן c ע"ש A (כל c).

תשובה: תכונת A הנכונה $A \in M_n(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ נכנסת.

פתרון: אם c : $\sum_{j=1}^n a_{ij} = n \leftarrow n$ הוא ע"ש A ו"ע $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$N(A) = \{v \in F^n \mid Av = 0\} = \ker T_A \quad N(A) = N \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$N(A)$ זה תת מרחב העצמי של הע"ש 0 ומכאן ש- $N(A) = \{v \in F^n \mid Av = 0\}$.

$$N(A) = \{v \in F^n \mid Av = 0\}$$

2. $\{v_1, \dots, v_{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n$ is a basis for $\mathbb{R}^n$ if and only if $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ not

⑫ F^h loop pf

⚠ התרגיל האחרון לא עובד מעט כל שורה. חשב את $F = \mathbb{Z}_2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
אז יש גם 'חז' (סלון) $(2=0)$, $-1 = \mathbb{Z}_2$ וכן אין כנס 0 ש'ו.
← התרגיל עובד כאשר $\text{char } F \nmid n$ (פונקטור n -ר F)

תצבורת - מסתנים אופייני:

תהי $A \in M_n(F)$. ציינו את הפולינום המינימלי של A כפולינום $p_A(x)$. אז $p_A(x) = \det(A - xI) \in F[x]$.

፡ጥሐፅገ

(1) ראיתם מכיתה שאם $A - B$ אז $B - A$ נכונה $\Rightarrow A - B$ רקסיות (קטאות צולות) $A \neq B$

$$P_A = P_B \quad \text{ז"כ} \iff (B = PAP^{-1} \rightarrow P \text{ מתחלף } P \rightarrow N'')$$

2) עבור $\lambda \in F$, λ הוא סעיף של A $\Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$.

$$P_B - P_A \iff \min_{A, B} (3) \quad (3)$$

$P_{AB} = P_{BA}$ זכרונות על A אינן תלויות באלו של B

פתרון: AB, BA הן מוטות, $\therefore AB = A(BA) \cdot A^{-1}$

⚡ צריכה ההשיבות איתה הזדקתו של A, B: $P_{AB} = P_{BA}$

טעמא: תהי $A \in M_n(F)$ אז A מכילה מספר $\leftrightarrow A$ ציורה מטריצה אלכסונית (הוכחה בקלות).

A sei $\delta\delta$ $113N$. $a \in \mathbb{R}$ wobei $M_n(\mathbb{R}) \ni A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ gib

המקור פרה A שכינה מצב הסם

$$P_A(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$$

$$\delta^2 \quad 2, 1, a \quad p_k, p_\delta \quad a \neq 1, 2 \quad A \text{ רצופה} \quad n \text{ פרמ נמאק } -p_k$$

$$M_1 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1-2q \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad M_a = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} q \\ q-2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad M_2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

כאן יש המס - אצל סוכן ישר ופשוט נקח וקטור מכל אחד.

$a=2 \vee a=1$ $\text{פ"ק } 1 \text{ ו} 2 \text{ של } \text{סדרות } 1, 2, 3, \dots$

ס"ס הרקנו האשח קרי יש 2/1 שווה 2-5 $\neq$ צרכו הרקנו

[illegible]