

# דינאמיקות II תמוז 1

תבנית בתי: איך חוקר הישר.

## חוקים:

(הצורה: חוק (חילוף עם יחידה) זו קבוצה  $R$  עם פעולות (הקטאות חיסור

וכפ ומכונות  $+$ ,  $\cdot$ , ומקיימות את כללים:

$$\forall a, b \in R \quad a + b = b + a \quad (1)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (2)$$

$$(3) \quad \text{קיים איבר } 0 \in R, \quad \forall a \in R \quad a + 0 = 0 + a = a \quad (\text{נקט איבר נייטרלי לחיבור})$$

$$(4) \quad \forall a \in R \quad \text{קיים } b \in R \quad \text{כך ש-} a + b = 0 \quad (\text{כל נקטו תוצי שגם סידה לחיסור}).$$

$$(5) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(6) \quad a \cdot b = b \cdot a \quad \text{חלופי}$$

$$(7) \quad \text{קיים איבר } 1 \in R \quad \text{כך ש-} a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad (\text{נקטו איבר נייטרלי כיתוב}).$$

$$(8) \quad a(b + c) = ab + ac$$

⚠ הערה חשובה איבר נייטרלי בייחס לחיסור 'חייב' נניח 'סוף' (נייטרלי  $+$  שני דברים, מתקיים:

$$\begin{matrix} \times \\ 0' = 0 + 0' = 0 \\ \text{סוף} \quad \text{סוף} \quad \text{סוף} \end{matrix}$$

(אם באופן דומה באיבר הנייטרלי בייחס לכלל הוא יחיד.

(3) גם  $a \in R$  שאיבר נייטרלי בייחס לחיסור.

## דוגמאות:

1. כז שבה הטו חזק. למעשה, חזק  $R$  הינו שבה  $0 \neq 1$  וזו גם  $0 + x \in R$

יש הופכי בייחס צפון, סומר קיים  $x \in R$  כך ש-  $xy = 1$ .

2.  $Z$  עם הפעולות הרגילות

3. 'הי'  $F$  שבה  $M_n(F)$  עם פעולות חיסור וכלל

4. קפי המעל הצדדים עם הפעולות הרגילות, מקיים את כל התנאים בהצורה חזק  $M_n$

קיום איבר נייטרלי לכלל.

5. גם  $A$  קפי  $1-R$  חזק, אז  $R^x$  מהווה חזק (טויל אוצקה).

הצבה: יהי  $R$  חוג. א. ב.  $a \in R$  נתון מחזיק אפס אם  $a \neq 0$  וקיים

$$b \neq 0 \text{ כך ש- } ab=0.$$

דוגמה: ב-  $\mathbb{Z}_6$  2, 3 הם מחזיקי אפס.

ובאופן כללי: ב-  $\mathbb{Z}_n$   $a$  הוא מחזיק אפס  $\Leftrightarrow a$  מחלק את  $n$ .

בשדה אין מחזיקי אפס: אם  $a \neq 0$  וקיים  $b \in F$  כך ש-  $ab=0$  אז  $a=0$  כפי שהוכחנו.

$$b=0$$

הצבה: יהי  $R$  חוג. תת קבוצה  $S \subseteq R$  נקראת תת חוג אם  $S$  סגורה תחת

הפעולות  $+$  ו-  $\cdot$ . במקרה זה  $S$  יורש באופן טבעי מבנה חוג  $N-R$ .

הצורה: יהי  $R$  חוג. א. ב.  $a \in R$  נתון הפוך אם קיים  $y \in R$  כך ש-

$$ay=xy=1.$$

שתי נוסחאות:

הצבה: אם  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  ו-  $a_n \neq 0$  אז מדרג  $f$  הוא  $\deg(f) = n$ .

שתי נוסחאות נוספות:  $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ .

המסדר הוא תמיד מכפול של מספרים ראשוניים. לפעמים מדרג  $f$  הוא  $\deg f$  והפעולה  $\deg$  היא

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g$$

$$\deg(f+g) = \max\{\deg f, \deg g\}$$

תכונה:  $(F[x])^x = F^x = F[x]$

תכונה:  $fg$  יהיו שתי נוסחאות  $f$  ו-  $g$  קבועים שונים מ-0.

$$\mathcal{U}(f) = f(a)$$

הצבה: שתי נוסחאות "קטן" מתוקן אם  $\mathcal{U}(f) \neq 0$  (המקרה של החזקה הרי שדווקא שווה ל-0).

תוצאה: יהי  $f \in \mathbb{Q}[x]$  שני מתוקן, אז מקבלים שונים  $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

( $a_i \in \mathbb{Q}$ ). ונגד  $a$  שונים  $f$  הוא  $b|a$ .