ליניארית 24

<u>תזכורת משפט</u> ריס: יהי V מרחב הרמיטי, נוצר סופית אזי לכל $\xi\in V^*$
קיים ויחיד $a\in V$ כך ש- $\forall x\in V$, $\xi(x)=(x,a)$

<u>משפט</u>: יהי V מרחב הרמיטי נוצר סופית, $M\subset V$ תת מרחב ליניארי.
אזי $V=M\oplus_\perp M^\perp$ כאשר $M^\perp=\{x\in V \mid \forall y\in M\ (x,y)=0\}$

<u>הוכחה</u>: נוכיח $M\cap M^\perp=\{\theta\}$.

יהי $x\in M\cap M^\perp$. בפרט $(x,x)=0\Rightarrow x=\theta$. ברור $M\oplus M^\perp\subset V$.

נרצה שיתקיים שוויון $\Leftrightarrow$ $\dim M\oplus\dim M^\perp\overset{?}{=}\dim V$

$\dim M^\perp=\dim V-\dim M$. נתבונן בפונ' $T: V\to M^*$

$$\underbrace{(T(a))}_{M^*}(x)=(x,a)\qquad \forall x\in M\quad \forall a\in V$$

$$\ker T=T^{-1}\{\theta_{M^*}\}=M^\perp$$

נשים לב: T-לא ט"ל. T נקרא אנטי ליניארית: $T(a+b)=T(a)+T(b)$
$T(\lambda a)=\bar\lambda\, T(a)$

${}^{\mathbb R}T: {}^{\mathbb R}V\to {}^{\mathbb R}(M^*)$ ט"ל.

$$2\dim_{\mathbb C}M^\perp=\dim_{\mathbb R}\overbrace{\ker {}^{\mathbb R}T}^{{}^{\mathbb R}(M^\perp)}-\dim_{\mathbb R}{}^{\mathbb R}V-\dim_{\mathbb R}\mathrm{Im}({}^{\mathbb R}T)\ge$$
$$\ge\dim_{\mathbb R}{}^{\mathbb R}V-\dim_{\mathbb R}{}^{\mathbb R}(M^*)=2(\dim_{\mathbb C}V-\dim_{\mathbb C}M^*)=2(\dim_{\mathbb C}V-\dim_{\mathbb C}M)$$

כלומר קיבלנו לכן $\dim_{\mathbb C}M^\perp\ge\dim_{\mathbb C}V-\dim_{\mathbb C}M$ $\quad\dim M^\perp=\dim V-\dim M$

לכן $M\oplus M^\perp=V$ ■

ט"ל צמודה במרחב הרמיטי

יהי V מרחב הרמיטי. $\varphi: V\to V$ ט"ל.

<u>משפט</u>: (1) לכל ט"ל $\varphi: V\to V$ קיימת ויחידה ט"ל φ^* שמקיימת $(\varphi x,y)=(x,\varphi^* y)$ $\forall x,y\in V$

(2) $(\varphi^*)^*=\varphi$ $\qquad$ (3) $(\varphi_1+\varphi_2)^*=\varphi_1^*+\varphi_2^*$

(4) $(\lambda\varphi)^*=\bar\lambda\cdot\varphi^*$ $\qquad$ (5) $\varphi_1\circ\varphi_2=\varphi_2^*\circ\varphi_1^*$

<u>הוכחה</u>: (1) יחידות: נניח שקיימת עוד φ' שמקיימת: $(x,\varphi^* y)=(\varphi x,y)=(x,\varphi' y)$

כלומר $\forall x,y\in V$: $(x,(\varphi^*-\varphi')y)=0$. נב.ח $x=(\varphi^*-\varphi')y$ לכל y ונקבל $\varphi^*=\varphi'$ ✓

קיום: יהי $y\in V$ כלשהו. נתבונן בפונ' הליניארי על V $\quad x\longmapsto(\varphi x,y)$

לפי משפט ריס קיים וקטור יחיד שנסמנו $\varphi^* y$ כך ש- $(\varphi x,y)=(x,\varphi^* y)$ $\quad\varphi^*: V\to V$

המשך ↙

נראה ש φ^* ל"ל:

$$\varphi^*(y_1+y_2) \overset{?}{=} \varphi^* y_1+\varphi^* y_2 \Leftrightarrow \forall x \quad (x,\varphi^*(y_1+y_2)) \overset{?}{=} (x,\varphi^* y_1+\varphi^* y_2)$$

$$(\varphi x, y_1+y_2) = (\varphi x, y_1)+(\varphi x, y_2) = (x,\varphi^* y_1)+(x,\varphi^* y_2) = (\varphi x,y_1)+(\varphi x,y_2)$$

$$\varphi^*(\lambda y) \overset{?}{=} \lambda \varphi^*(y)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall x \quad (x,\varphi^*\lambda y) = (\varphi x, \lambda y) \quad (x,\lambda\varphi^*(y)) = \bar\lambda(x,\varphi^* y) = \bar\lambda(\varphi x, y) = (\varphi x, \lambda y) \checkmark$$

(2) צ"ל: $(y,\varphi^* x) \overset{?}{=} (\varphi y, x) \Leftrightarrow \overline{(y,\varphi^* x)} \overset{?}{=} \overline{(\varphi y,x)} \Leftrightarrow (\varphi^* x, y) = (x,\varphi y)$

(3) צ"ל: $((\varphi_1+\varphi_2)x, y) \overset{?}{=} (x,(\varphi_1^*+\varphi_2^*)y)$

$$(\varphi_1 x+\varphi_2 x, y) = (x, \varphi_1^* y+\varphi_2^* y)$$

(4) $((\lambda\varphi)x,y) = (x,(\bar\lambda\varphi^*)y) = \lambda(x,\varphi^* y) = \lambda(\varphi x,y)$; $\lambda(\varphi x, y) = \lambda(\varphi x, y)$

(5) אותה שיטה. ∎

<u>טענה</u>: תהי $\varphi: V\to V$ ל"ל. יהי $e_1,\dots,e_n\in V$ בסיס אורתונורמלי. תהי A מטריצה של φ ביחס ל-$[e]$. אזי המטריצה של φ^* ביחס ל-$[e]$ שווה ל-A^* ($=\bar{A}^t$).

<u>הוכחה</u>: $\varphi e_j = \sum_p A_{pj} e_p$. אזי

$$(\varphi e_j, e_i) = (\sum_p A_{pj} e_p, e_i) = \sum_p A_{pj}\overbrace{(e_p,e_i)}^{\delta_{pi}} = A_{ij}$$

תהי B המטריצה של φ^*. $B_{ij} = (\varphi^* e_j, e_i) = (e_j,\varphi e_i) = \overline{(\varphi e_i, e_j)} = \overline{A_{ji}}$

לכן $B = A^*$ ∎

<u>טענה</u>: הטענות הבאות שקולות: (1) φ צמודה לעצמה. $\overline{\varphi=\varphi^*}$

(2) המטריצה של φ בכל בסיס אורתונורמלי היא הרמיטית.

(3) קיים בסיס אורתונורמלי שבו המטריצה של φ היא הרמיטית.

הוכחה זהה ← כמו של הממשיים.

<u>משפט</u>: תהי $\varphi: V\to V$ צמודה לעצמה. אזי:

(1) כל הע"ע של φ ממשי.

(2) קיים בסיס אורתונורמלי של V של ו"ע. (בפרט בבסיס זה המטריצה של φ אלכסונית וממשית).

<u>הוכחה</u>: (1) יהי x ו"ע עם ע"ע λ. $\varphi x = \lambda x$. אזי: $\bar\lambda(x,x) = (x,\lambda x) = (x,\varphi x) = (\varphi x, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x,x)$

$\Leftarrow \lambda = \bar\lambda \Leftarrow \lambda\in\mathbb{R}$.

המשך

העתקות יוניטריות

המשך הוכחת המשפט:

(ב) $n=\dim V$. נוכיח עם אינד' ב-n.

$n=1$ ברור. $n-1\to n$: יהי $e_1\in V$ ו"ע מנורמל עם ע"ע λ.

$M=\mathrm{Span}\{e_1\}$. M הוא φ אינו'.

למה: $\varphi: V\to V$ צמודה לעצמה. M φ-אינו'. אזי $M^\perp$ גם φ-אינו'.

$\Leftarrow$ $M^\perp$ הוא φ אינו'. $\dim M^\perp = ~~n~~ n-1$. לפי הנחת האינדוקציה קיים בסיס אורתונ' של $M^\perp$ של ו"ע של φ. $e_2,\dots,e_n\in M^\perp$. אזי $e_1,\dots,e_n$ בסיס אורתו' של V של ו"ע ■

הוכחת הלמה: צ"ל שאם $z\in M^\perp$: $\varphi z\in M^\perp \Leftarrow (\varphi z, x)=0$ לכל $x\in M$.

$$(\underset{M^\perp \ni}{z},\underset{\in M}{\varphi x})=0 \ \checkmark$$

M φ אינו'

■

הגדרה: יהי V מרחב הרמיטי. נאמר ש- $U: V\to V$ נקראת אוניטרית אם U הפיכה וגם $(Ux, Uy)=(x,y)$ $\forall x,y\in V$.

הגדרה: מטריצה $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ נקראת אוניטרית אם $A^*A=I_n$.

טענה: יהי V מרחב הרמיטי נוצר סופית. $U: V\to V$. ט"נ. הטענות הבאות שקולות:

(1) U אוניטרית

(2) U שומרת מכפלה הרמיטית.

(3) U שומרת על נורמה.

(4) $U^*U=Id$

(5) מטריצה של U בכל בסיס אורתונורמלי היא אוניטרית.

(6) קיים בסיס אורתונורמלי שבו המטריצה של U אוניטרית.

משפט: תהי $U: V\to V$ אוניטרית (V נוצר סופית).

(1) כל ע"ע של U הם מס' מרוכב מנורמה 1.

(2) קיים בסיס אורתונ' של V של ו"ע של U.

הוכחה: (1) יהי x ו"ע עם ע"ע λ. $Ux=\lambda x$.

$$\frac{1}{\bar\lambda}(x,x) = (x,\tfrac{1}{\lambda}x) = (x,U^{-1}x) = (x,\underset{U^{-1}}{U^*}x) = (Ux,x) = (\lambda x,x) = \lambda(x,x)$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{1}{\bar\lambda} \Rightarrow \lambda\bar\lambda=1 \Rightarrow |\lambda|=1 \ \checkmark$$

(2) אותה אינדוקציה, כמו המשפט הקודם. e_1 ו"ע מנורמל, $M=\text{Span}\{e_1\}$.

$\dim M^\perp = n-1$. לפי ה"א קיים בסיס אורתונורמלי $e_2,\dots,e_n$ של $M^\perp$ של ו"ע.

אז $e_1,\dots,e_n$ בסיס אורתונורמלי של V של ו"ע ■

השתמשנו ב-

למה: אם U אוניטרית, $M\subset V$ תת מרחב לגביו U -אינו' אזי $M^\perp$ גם U אינו'.

<u>הוכחה</u>: נתבונן $U|_M: M\to M$. $U|_M$ שומרת מכפלה הפנימית $\Leftarrow$

$U|_M$ הפיכה, בפרט על. צ"ל שאם $x\in M^\perp$, $Ux\in M^\perp \Leftrightarrow$ לכל $y\in M$.

$(Ux,y)\overset{?}{=}0$. משום ש $U|_M:M\to M$ על לכל $y\in M$ קיים $z\in M$ כך

ש $y=Uz$. אז $(Ux,y)=(Ux,Uz)=(\underset{M^\perp \ni}{x},\underset{M \ni}{z})=0$

■