ליניארית 2~~1~~3

<u>תזכורת:</u> פונ' ומטריצות הרמטיות

<u>סימון:</u> אם $A_{n\times n}$ מגדירים $(A^*)_{ij}=\overline{A}_{ji}$ $\Leftarrow$ $A^*=\overline{A}^t$

הסימנים של B (מטריצה של η) לא תלוי בבסיס. לכן בפרט $p+q$ לא תלוי בבחירת

הבסיס המנורמל, כאשר: $\eta(x,y)=\underbrace{\lambda_1x_1\bar{y}_1+\ldots+\lambda_px_p\bar{y}_p}_{\lambda_i>0}+\underbrace{\lambda_{p+1}x_{p+1}\bar{y}_{p+1}+\ldots+\lambda_{p+q}x_{p+q}\bar{y}_{p+q}}_{\lambda_i<0}$

<u>משפט:</u> מספר של $1,-1,0$ לא תלוי בבחירת הבסיס הקנוני.

<u>הגדרה:</u> פונ' הרמיטי η נקרא <u>מוגדר חיובית</u> אם $\eta(x,x)>0$ לכל $x\neq\theta$.

⚠ <u>הערה:</u> אם η הרמיטי אז $\eta(x,x)\in\mathbb{R}$

⚠ <u>הערה:</u> η מוגדר חיובית $\Leftrightarrow$ ההצגה הקנונית של η שווה $x_1\bar{y}_1+\ldots+x_n\bar{y}_n$ $\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}$

<u>דוגמאות:</u>

① $V=\mathbb{C}^n$. $\eta(x,y)=x_1\bar{y}_1+\ldots+x_n\bar{y}_n$ - מוגדר חיובית.

② $V=C([a,b],\mathbb{C})$. $\eta(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$ - לינארית (מעל $\mathbb{C}$) ביחס ל-f

$\eta(g,f)=\int_a^b g(x)\overline{f(x)}=\overline{\int_a^b f(x)\overline{g(x)}}=\overline{\eta(f,g)}$ - $\frac{1}{2}$ לינארית ביחס ל-g

ססקווי $1\frac{1}{2}$ לינארית

מתקיים: $\eta(f,f)=\int_a^b \underbrace{|f(x)|^2}_{\geq 0}dx\geq 0$ אם $f\neq 0$, מרציפות.

<u>הגדרה:</u> מטריצה הרמיטית B נקראת <u>מוגדרת חיובית</u> אם הפונ' ההרמיטי

$\eta_B(x,y)=\sum_{i,j=1}^n B_{ij}x_i\bar{y}_j$ מוגדר חיובית.

<u>דוגמאות:</u>

① $I_{n\times n}$, $\lambda\cdot I_{n\times n}$, $\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$ $\lambda_i>0$.

<u>למה:</u> אם B מטריצה הרמיטית אז $\det B\in\mathbb{R}$

הם דט' של מינורים זוויתיים.

<u>משפט (סילבסטר):</u> מטריצה הרמיטית מוגדרת חיובית $\Leftrightarrow$ $\Delta_i>0$ ← כמו ממשי. (הוכחה)

<u>הוכחת הלמה:</u> $B=B^*=\overline{B}^t$. אנו טוענים ש $\det(B)=\det(\overline{B}^t)=\det(\overline{B})\overset{*}{=}\overline{\det B}\Rightarrow \det B\in\mathbb{R}$ ✓

נוכיח את *: $\det\overline{B}=\sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\,\overline{B}_{1\sigma(1)}\cdots\overline{B}_{n\sigma(n)}=\overline{\sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\, B_{1\sigma(1)}\cdots B_{n\sigma(n)}}=\overline{\det B}$

■

דוגמא ② $B=\begin{bmatrix}1 & i/2\\ -i/2 & 1\end{bmatrix}$ - הרמיטית.

נפעיל את משפט סילבסטר: $\Delta_1=1$ $\Delta_2=1-(\frac{1}{4})=\frac{3}{4}>0$

⇐ B מוגדרת חיובית. נסמן $B>0$ - מטריצה מוגדרת חיובית.

המקרה בה נניח מרחב הרמיטי הוא ממימד סופי.

הגדרה: מרחב הרמיטי זה מ"ו V מעל $\mathbb{C}$ נוצר סופית עם פוני הרמיטי מוגדר חיובית.

דוגמאות: ① $\mathbb{C}^n$ עם $(x,y)=x_1\bar{y}_1+\dots+x_n\bar{y}_n$ מכפלה הרמיטית סטנדרטית.

② לא נוצר סופית $V=C([a,b],\mathbb{C})$, $(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$

הגדרה: יהי V מרחב הרמיטי. סדרה $v_1,\dots,v_n\in V$ נקראת אורתוגונלית אם $(v_i,v_j)=0$ $\forall i\neq j$.

טענה: סדרה אורתוג' של וקטורים שונים מ-0 היא בת"ל.

הוכחה: נניח $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i=0$. נתבונן במכפלה הרמיטית עם v_j: (לכל j)

$$(\sum\lambda_i v_i,v_j)=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n\lambda_i(v_i,v_j)=0\Rightarrow \lambda_j\underbrace{(v_j,v_j)}_{>0}=0\Rightarrow\lambda_j=0$$

∎

משפט: לכל מרחב הרמיטי קיים בסיס אורתונורמלי. ← הוכחה כמו בממשי

הגדרה: יהי η פוני הרמיטי. $v_1,\dots,v_k\in V$. מטריצת גרם: $B_\eta(v_1,\dots,v_k)_{ij}=\eta(v_i,v_j)$

ומתקיים: דטרמיננטה של גרם $G_\eta(v_1,\dots,v_k)=\det B_\eta(v_1,\dots,v_k)$.

משפט: נניח η מוגדרת חיובית. אזי $G_\eta(v_1,\dots,v_k)\geq 0$ ושוויון מתקיים ⇔ $v_1,\dots,v_k$ תלויה ליניארית

מסקנה (קושי שוורץ): V מרחב הרמיטי. אזי $|(x,y)|\le\sqrt{(x,x)(y,y)}$ ושוויון מתקיים ⇔ x,y פרופ'

הוכחה: $G(x,y)=\begin{vmatrix}(x,x)&(x,y)\\(y,x)&(y,y)\end{vmatrix}=(x,x)(y,y)-(x,y)(y,x)=(x,x)(y,y)-|(x,y)|^2\geq 0$

$=0$ ⇔ x,y ת"ל ⇔ x ו-y פרופ'.

דוגמאות: ① $V=\mathbb{C}^n$ סטנדרטי. $(x,y)=x_1\bar{y}_1+\dots+x_n\bar{y}_n$

$$|x_1\bar{y}_1+\dots+x_n\bar{y}_n|\le\sqrt{\sum_{i=1}^n|x_i|^2}\cdot\sqrt{\sum|y_i|^2}$$

② $V=C([a,b],\mathbb{C})$. $(f,g)=\int_a^b f(x)\bar{g}(x)\,dx$

$$\left|\int_a^b f(x)\bar{g}(x)\,dx\right|\le\sqrt{\int_a^b|f|^2dx}\cdot\sqrt{\int_a^b|g|^2dx}$$

המשך יוניטריות

<u>נורמה</u> (אורך) של וקטור במרחב הרמיטי $|x|=\sqrt{(x,x)}$

<u>משפט</u>: ① $|x|\geq 0$, $|x|=0 \Leftrightarrow x=\theta$

② $|\alpha x|=|\alpha|\cdot|x|$ לכל $x\in V$, $\alpha\in\mathbb{C}$.

③ אי שוויון המשולש: $|x+y|\leq|x|+|y|$ והשוויון מתקבל $\Leftarrow$ x ו-y פרופורציוניים עם מקדם אי שלילי.

<u>גרם שמידט במרחב הרמיטי</u>: V מרחב הרמיטי. $x_1,\dots,x_n\in V$ בת"ל.

מטרה: לבנות סדרה אורתונור', $e_1,\dots,e_n\in V$ כך שלכל $1\leq k\leq n$,

$$\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_k\}=\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_k\}$$

עבור הוקטור הראשון נקח $e_1=\frac{x_1}{|x_1|}$ (יש במקרה אינסוף אפשרויות כי ניתן להכפיל בכל סקלר מרוכב עם נורמה 1)

נניח בנינו $k-1$ וקטורים, $e_1,\dots,e_{k-1}$. אזי

נרצה ש- $e_k\in\mathrm{Span}\{x_1,\dots,x_k\}$

$$e_k' := -\sum_{i=1}^{k-1}\underbrace{(x_k,e_i)}_{\text{הסדר חשוב!!}}e_i + x_k$$

נבדוק $(e_k',e_j)=0$ $\forall 1\leq j\leq k-1$:

$$(e_k',e_j)=\left(-\sum_{i=1}^{k-1}(x_k,e_i)e_i+x_k,e_j\right)=-\sum_{i=1}^{k-1}(x_k,e_i)\overbrace{(e_i,e_j)}^{\delta_{ij}}+(x_k,e_j)=-(x_k,e_j)+(x_k,e_j)=0$$

ולסיום $e_k:=\frac{e_k'}{|e_k'|}$.

<u>משפט (ריס)</u>: יהי V מרחב הרמיטי (נוצר סופית). אזי לכל פונ' הרמיטי $\varphi: V\to\mathbb{C}$ ($\varphi\in V^*$) קיים ויחיד וקטור $a\in V$ כך ש- $\varphi(x)=(x,a)$ $\forall x\in V$

<u>הוכחה</u>: נתבונן במפונ' $T: V\to V^*$ שמוגדרת $(Ta)(x)=(x,a)$

נראה T על וחח"ע. כי אם T על אזי לכל $\varphi\in V^*$ קיים $a\in V$ כך ש- $\varphi=T(a)$,

כלומר $\forall x\in V$, $\varphi(x)=(x,a)$. T חח"ע $\Leftrightarrow$ לכל φ קיים a יחיד כך ש- $\varphi=T(a)$.

$$(T(a_1+a_2))(x)=(x,a_1+a_2)=(x,a_1)+(x,a_2)=(T(a_1))(x)+(T(a_2))(x)$$

$$(T(\lambda a))(x)=(x,\lambda a)=\bar{\lambda}(x,a)=\bar{\lambda}(T(a))(x)$$

אולם T לינ' מעל $\mathbb{R}$: $T: {}^{\mathbb{R}}V\to{}^{\mathbb{R}}(V^*)$ לינ'.

$\dim_{\mathbb{R}}{}^{\mathbb{R}}(V^*)=2n$, $\dim_{\mathbb{R}}{}^{\mathbb{R}}V=2n$ ולכן T על $\Leftrightarrow$ T חח"ע. לכן מספיק להוכיח

ש- T חח"ע $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,T=\{\theta\}$.

נניח $a\in\mathrm{Ker}\,T$. $T(a)=\theta \Leftrightarrow (x,a)=0\ \forall x \Rightarrow (a,a)=0 \Leftrightarrow a=\theta$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\,T=\theta$ $\Leftrightarrow$ T חח"ע ■