

~~20~~ 1

צורה קיונית:

Diagram illustrating the transformation of a 2D vector into a 3D vector through a series of rotations:

- Initial 2D vector components: $\cos \theta_1$ and $\sin \theta_1$.
- Transformed 3D vector components: $\cos \theta_3$ and $\sin \theta_3$.
- Rotation angles (indicated by ± 1): ± 1 , ± 1 , and $\sqrt{\pm 1}$.

$\dim V = n$ הוא חת קיום הצורה הקטנית:

נעשה אינצוקציה $D-K$. עכור $K=1$ - פחור.

$|\lambda|=1$, $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $x + iy \in V$, σ , τ , $n=2$

$$u(x+iy) = e^{\alpha} u(x+iy) = \alpha \cdot (x+iy) = \alpha x + i\alpha y \quad \text{Sic, } \lambda = \alpha \in \mathbb{R} : p=0 \text{ f.c. } \textcircled{10}$$

$$\alpha = \pm 1 \Leftrightarrow |\alpha| = 1 \quad U_y = dy, \quad U_x = dx \quad \Leftarrow$$

$$u = \alpha \cdot \text{Id} \Leftrightarrow \text{Span}\{x, y\} = V \quad \text{wsk sind } x, y \text{ plc}$$

1. $U \cap M \iff \dim M = 1, M = \text{span}\{x, y\}$ $\mu \in K, \nu \in K, \lambda \in K$

כיוון M^+ זה U ו- U (הוויכוח) שיעור שם. מתקיים $V = M \oplus M^\perp$

(נבחר גם e_1 של M ו- e_2 של המישור π כמקסימואל המטרית תורה

כ"י u ו M^2 היא מסת כפול בסקר, והוא ח"פ להיות ± 1 ב-3 למ"ם (תלמיד).

ד) $\beta \neq 0$: הווריון קשיחור שסבר $\beta = 0$ וכן $|x| = |y|$. (כאן):

✓ से 'मिल' को e_1, e_2 से. $e_2 = \frac{y}{|y|}$, $e_1 = \frac{1 \times i}{|1|}$

$$\begin{cases} u_{e_1} = \alpha e_1 - \beta e_2 \\ u_{e_2} = \beta e_1 + \alpha e_2 \end{cases} \quad \Leftarrow \quad u_{e_1 + i e_2} = U(e_1 + i e_2) = (\alpha + i\beta)(e_1 + i e_2) \\ \text{da } \text{wirkt } \text{auf } e_1 + i e_2 \text{ " } (\alpha e_1 - \beta e_2) + i(\beta e_1 + \alpha e_2)$$

$\beta = -\sin\theta$, $\alpha = \cos\theta$ $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha^2 + \beta^2 = |\lambda|^2 = 1$ ולכן

$$U = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} U e_1 = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \\ U e_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2 \end{cases}$$

כעת ע"ח שהוכחנו עבור מרחבים ממ"מ, נוכיח עבור א:

$V \rightarrow V + \gamma$ ק"מ תת מרחב U איננו McV ממימד 2. M^2 U -אינולריאנט.

$V = M \oplus M^\perp$ ← איחוד הקסיסים הפנימיים הוא קטע תתני של V

פירוק פונדמנטלי של הפיכה במרחב צוקייד

הצגה: $T: V \rightarrow V$ של מרחב אוקלידי, נקטות מוגדרת חזקה A

$$A^* = A \quad \text{וזר} \quad A \neq 0 \quad \text{סל} (A, x, x) \quad \text{כטון:} \quad A \neq 0$$

טענה: T צמודה (היא מוגדרת חזקה) $\Leftrightarrow$ כל λ של T הוא חזקה.

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח T צמודה. יהי $\lambda \in \text{spec}(T)$. אזי קיים $x \neq 0$, $Tx = \lambda x$.

$$\text{אזי} \quad 0 < \lambda^2 = \lambda(\lambda x, x) = (T^2 x, x) = (T(\lambda x), x) = \lambda(Tx, x) = \lambda^2 \lambda x, x = \lambda^3 \lambda x, x = \lambda^4 \lambda x, x = \dots$$

$\Rightarrow$ קיים בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של V , ו- $Te_i = \lambda e_i$, ומתקנה $\lambda = 0$.

$$x \neq 0: (Tx, x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i Te_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \lambda e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i^2 = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda \|x\|^2 > 0$$

אם $\lambda < 0$ אז $(Tx, x) < 0$ וזה סותר ל- $(Tx, x) > 0$

טענה: אם T אזי היא הפיכה ו- T^{-1} סל.

הוכחה: T הפיכה, $0 \notin \text{spec } T$, וכן T הפיכה.

T^{-1} צמודה צמודה כי $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} = T^{-1}$. (טוב כי היא מוגדרת חזקה):

$$\text{יהי } \mu \in \text{spec } T^{-1}. \text{ בל: } \mu = \frac{1}{\lambda} \text{ ל- } \lambda \in \text{spec } T. \text{ קיים } x \neq 0 \text{ ש- } T^{-1}x = \mu x \Rightarrow Tx = \frac{1}{\mu}x$$

$$\Rightarrow x = \mu Tx \Rightarrow Tx = \frac{1}{\mu}x \Rightarrow \frac{1}{\mu} \in \text{spec}(T) \Rightarrow \mu \neq 0$$

טענה: תהי ψ ו- ψ^* סל הפיכה, אזי $\psi\psi^*, \psi^*\psi$ סל.

הוכחה: נראה צמודות צמודות. $(\psi\psi^*)^* = \psi^*(\psi^*)^* = \psi^*\psi$, $(\psi^*\psi)^* = \psi(\psi^*)^* = \psi\psi^*$.

$$x \neq 0: (\psi^*\psi x, x) = (\psi x, \psi x) \geq 0$$

אם $\psi x = 0$ אז $\psi^*\psi x = 0$ וזה סותר ל- $(\psi^*\psi x, x) \geq 0$

טענה: תהי $T: V \rightarrow V$, אזי קיימת ויחידה S של T שמקיימת

$$S^2 = T$$

הוכחה: קיים בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ של V ו- $Te_i = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \geq 0$.

$$S e_i = \sqrt{\lambda_i} e_i \quad \text{המטריצה של } S \text{ ב-} [e]$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

S צמודה צמודה (המטריצה של S היא סימטרית).

$$0 < S \leq T, \quad \sqrt{0} < S \leq \sqrt{T}$$

$$\text{יחידות: } \text{spec } T = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad \mu_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad M_{\mu_i} = \{x \in V \mid Tx = \mu_i^2 x\}$$

$$M_{\mu_1} \oplus \dots \oplus M_{\mu_n} = V \quad \text{ו-} \quad S|_{M_{\mu_i}} = \sqrt{\lambda_i} \text{Id}$$

(וכיח של M_{μ_i} S -אינו, ו- $S|_{M_{\mu_i}} = \sqrt{\lambda_i} \text{Id}$ ומכאן תמצא היחידות)

תכונות יחידות

המשך הוכחת יחידות:

$$\sqrt{T \cdot S \stackrel{?}{=} S \cdot T} \quad \text{נשים לב של } T, S \text{ מתחלפים, כי}$$

$$\sqrt{S^2 \cdot S \stackrel{?}{=} S \cdot S^2}$$

$$T(Sx) = S(Tx) = S(\mu_i x) = \mu_i \cdot Sx \quad \text{יהי } x \in M_{\mu_i} \text{ (נכיון): } Sx \in M_{\mu_i}$$

$$\leftarrow \sqrt{Sx \in M_{\mu_i}} \quad \text{כיוון ש } M_{\mu_i} \text{ } S\text{-אינרטי}$$

$$R = \sqrt{\mu_i} \cdot Id \stackrel{?}{=} R^2 = \mu_i \cdot Id, R \text{ אנו יוצרים של } R \text{ ב-} R_i = S|_{M_{\mu_i}}: M_{\mu_i} \rightarrow M_{\mu_i}$$

R צמודה עצמה, כל ק"י ב- R אורתונורמל, כל $v_1, \dots, v_n$.

$$Rv_j = \varepsilon_j v_j \quad \text{כאשר } 0 < \varepsilon_j \leq 1$$

$$\blacksquare R = \sqrt{\mu_i} \cdot Id \stackrel{?}{=} R^2 = \mu_i \cdot Id \quad \text{כן } \varepsilon_j^2 = \mu_i \quad \varepsilon_j = \sqrt{\mu_i}$$

טענה: ט"ל מוצגת חזקה של Id היא שווה ל- Id .

$$\blacksquare \text{ תכונה: נבחר בסיס מעגל שבו המטריצה היא } \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{bmatrix}, \text{ כדוגמה. מכיוון שהיא אורתונורמלית: } | \mu_i | = 1 \Leftrightarrow \mu_i = 1 \Leftrightarrow \text{הט"ל היא } Id$$

משפט: תהי $\psi: V \rightarrow V$ הפכה כל מרחב אינפיניטימי. אזי קיימת יחידה

$$(U \text{ אורתונורמלית, } 0 < T) \quad \psi \circ U = T \quad \text{הצגה של } \psi \text{ ב-} U \text{ אורתונורמלית}$$

$$0 < \psi^* \psi = \frac{T}{T} \frac{U^* U}{Id} T = T^2 \quad \text{הוכחה: יחידות}$$

$$\text{כאשר } T = \sqrt{\psi^* \psi} \text{ יחידה (הטענה קובעת). } U = \psi \circ T^{-1} \text{ עקב } U \text{ יחידה}$$

$$\text{היום: נגדיר } T = \sqrt{\psi^* \psi} > 0, \text{ אז } U = \psi \circ T^{-1} \text{ נורמלית אורתונורמלית}$$

$$\blacksquare Id = U^* U = (\psi \circ T^{-1})^* (\psi \circ T^{-1}) = (T^*)^{-1} \psi^* \psi T^{-1} = T^{-1} (\psi^* \psi) T^{-1} = T^{-1} T^2 T^{-1} = Id \quad \checkmark$$

מסקנה: $\psi: V \rightarrow V$ הפכה, אזי קיימת יחידה הצגה $\psi = T_1 \circ U_1$ אורתונורמלית

$$\blacksquare \text{ הוכחה: } \psi = T_1 \circ U_1 \Leftrightarrow \psi^* = U_1^* \circ T_1^* \quad \text{אורתונורמלית } U_1 \text{ אורתונורמלית}$$

$$T = \sqrt{\psi^* \psi} \quad T_1 = \sqrt{\psi \cdot \psi^*} \quad \text{במקרה זה}$$

חזורים הרמיט " Hermit

הצורה: יהי V מ"מ מעל $\mathbb{C}$. פונק' הרמיט (דיומרי $1/2$) זו פונקציה

$\mathbb{C} \rightarrow V \times V: \eta$ כך $\eta = \eta^*$ (א) η דימורי (מעל $\mathbb{C}$), ב.חס זמשתר טושן, טומר:

$$\eta(x_1+x_2, y) = \eta(x_1, y) + \eta(x_2, y)$$

$$\eta(x, y) = \overline{\eta(y, x)} \quad (2)$$

$\lambda \frac{1}{2}$ " δ דימורי " $\leftarrow$ $\eta(x, y_1+y_2) = \overline{\eta(y_1+y_2, x)} = \overline{\eta(y_1, x)} + \overline{\eta(y_2, x)} = \eta(x, y_1) + \eta(x, y_2)$ 

$\eta(x, \lambda y_1) = \overline{\eta(\lambda y_1, x)} = \overline{\lambda \eta(y_1, x)} = \overline{\lambda} \overline{\eta(y_1, x)} = \overline{\lambda} \eta(x, y_1)$