לינארית 20

<u>משפט</u>: יהי V מרחב אוקלידי. $U: V\to V$ טרנס' אורתוג'. אזי קיים בסיס אורתונורמי שבו המטריצה של U היא

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{matrix} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \begin{matrix}\cos\theta_s & -\sin\theta_s\\ \sin\theta_s & \cos\theta_s\end{matrix} & & & & \\ & & & \boxed{\pm1} & & & \\ & & & & \boxed{\pm1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \boxed{\pm1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

<u>תזכורת</u>: ב-$\mathbb{R}^2$ סטנדרטי: $\det U=1$ ⇐ מטריצת סיבוב

$\det U=-1$ ⇐ מטריצת שיקוף ביחס לציר $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

<u>נכתב עם $\mathbb{R}^3$ עם מכפלה סטנדרטית</u>

$U:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ אורתוגונלית. דטרמיננטה היא 1 או -1.

א: <u>$\det U=1$</u> $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ v_3 ← סיבוב בזווית θ ביחס לציר שנפרש ע"י v_3.

ב: $\begin{bmatrix}\pm1 & & \\ & \pm1 & \\ & & \pm1\end{bmatrix}$ $\det=1$ יש 2 אפשרויות עד כדי שינוי סדר של איברי הבסיס:

$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\pi & -\sin\pi & 0\\ \sin\pi & \cos\pi & 0\\ 0&0&1\end{bmatrix}$ → שיקוף ביחס לציר.

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos0 & -\sin0 & \\ \sin0 & \cos0 & \\ & & 1\end{bmatrix}$

<u>לסיכום</u>: טרנס' אורתוגונלית של $\mathbb{R}^3$ עם $\det=1$ זה סיבוב ביחס לציר, וגם ההפך נכון.

א: <u>$\det U=-1$</u>

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}}_{\text{שיקוף ביחס למישור}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1\end{bmatrix}}_{\text{סיבוב סביב } V_3}$$

מתחלפות

$V_3^\perp = \mathrm{Span}\{v_1,v_2\}$

זה סיבוב ביחס לציר ועוד שיקוף ביחס למישור המאונך לו.

ב: $\begin{bmatrix}\pm1 & & \\ & \pm1 & \\ & & \pm1\end{bmatrix}$ $\det=-1$. יש 2 מקרים: $\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix}=-I$ ($\theta=\pi$) , $\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$ ($\theta=0$)

הרכבה של שני שיקופים (det=-1) וסיבובים יש $\det=1$ ⇐ זה סיבוב ביחס לציר אחר כלשהו.

<u>טענה</u>: במשפט הבלוקים ±1 מוגדרים באופן יחיד ע"י U, ו- $-\pi<\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s<\pi$ מוגדרים באופן יחיד ע"י U עד כדי תמורה וסימן. $\theta_i\neq0,\pm\pi$

<u>הוכחה</u>:

$$P_U(\lambda)=\det\left(\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon_1 & \\ & & & \ddots\ \varepsilon_t\end{bmatrix}-\lambda I_n\right)=\prod_{i=1}^{s}\underbrace{\begin{vmatrix}\cos\theta_i-\lambda & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i-\lambda\end{vmatrix}}_{(\cos\theta_i-\lambda)^2+\sin^2\theta}\cdot\prod_{j=1}^{t}(\varepsilon_j-\lambda)=$$

$$=\prod_{i=1}^{s}(\lambda^2-2\cos\theta_i\lambda+1)\cdot\prod_{j=1}^{t}(\varepsilon_j-\lambda)$$ ← הגורמים הראשונים פריקים מעל $\mathbb{R}$

(לפולינום יש אותו פירוק לגו' פריקים)

כי $\frac{\Delta}{4}=\cos^2\theta_i-1<0$ ($\theta_i\neq0,\pm\pi$) ⇐ $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_t$ מוגדרים באופן יחיד עד כדי תמורה,

ו- $\cos\theta_1,\ldots,\cos\theta_s$ מוגדרים באופן יחיד עד כדי תמורה ⇐ $\theta_1,\ldots,\theta_s$ עד כדי תמורה וסימן. ∎

<u>טענה</u>: תהי $U: V\to V$ טרנס' אורתוג' של מרחב אוקלידי. $M\subset V$ תמ"ו לינארי U אינווריאנטי. אזי $M^{\perp}$ גם U אינווריאנטי.

<u>הוכחה</u>: $U|_M: M\to M$ - שומרת על מכפלה פנימית $\Leftarrow$ $U|_M: M\to M$ איזו.

יהי $x\in M^{\perp}$. צ"ל: $Ux\in M^{\perp} \Leftrightarrow (Ux,v)=0 \quad \forall v\in M$.

קיים $w\in M$ כך ש $v=U(w)$ אזי: $(Ux,v)=(Ux,Uw)\overset{U \text{ שומרת על מכפלה פנימית}}{=}(\underset{M^{\perp}}{x},\underset{M}{w})=0$ ∎

⚠ תזכורת [3]

V מ"ו ממשי. הגדרנו ${}^{\mathbb C}V=V\times iV$ (מירכוב). $x+iy=(x,y)\in {}^{\mathbb C}V$, מעל $\mathbb C$.

לכן: $\varphi: V\to W$ לה"ל (מעל $\mathbb R$) נגדיר ${}^{\mathbb C}\varphi: {}^{\mathbb C}V\to {}^{\mathbb C}W$ (מעל $\mathbb C$).

${}^{\mathbb C}\varphi(x+iy)=\varphi(x)+i\varphi(y)$.

כעת נכתוב עם $\varphi: V\to V$, ${}^{\mathbb C}\varphi: {}^{\mathbb C}V\to {}^{\mathbb C}V$ - קיים ו"ע $x+iy$ עם ע"ע $\lambda=\alpha+i\beta$

$$\varphi(x)+i\varphi(y)={}^{\mathbb C}\varphi(x+iy)=(\alpha+i\beta)(x+iy)=(\alpha x-\beta y)+i(\beta x+\alpha y)$$

$$\begin{cases}\varphi(x)=\alpha x-\beta y\\ \varphi(y)=\beta x+\alpha y\end{cases}.$$

<u>טענה</u>: תהי $U: V\to V$ אורתוג'. יהי $x+iy$ ו"ע של ${}^{\mathbb C}U$ עם ע"ע $\lambda=\alpha+i\beta\notin\mathbb R$. אזי:

(1) $|\lambda|=1$ (2) $\underset{(\beta\neq 0)}{|x|=|y|}$ (3) $(x,y)=0$

<u>הוכחה</u>:

(1) $(x,x)=(Ux,Ux)=(\alpha x-\beta y,\alpha x-\beta y)=\alpha^2(x,x)+\beta^2(y,y)-2\alpha\beta(x,y)$

$(y,y)=(Uy,Uy)=(\beta x+\alpha y,\beta x+\alpha y)=\beta^2(x,x)+\alpha^2(y,y)+2\alpha\beta(x,y)$

נחבר את 2 השוויונות ונקבל: $(x,x)+(y,y)=(\alpha^2+\beta^2)((x,x)+(y,y))$

$1=\alpha^2+\beta^2=|\lambda|^2$ ✓

(2) $U(\alpha x+\beta y)=\alpha U(x)+\beta U(y)=\alpha(\alpha x-\beta y)+\beta(\beta x+\alpha y)=(\alpha^2+\beta^2)x-\alpha\beta y+\alpha\beta y=(\alpha^2+\beta^2)x$

$\Leftarrow$ $U(\alpha x+\beta y)=x$. $\Leftarrow$ $|\alpha x+\beta y|^2=|x|^2=|U(x)|^2=|\alpha x-\beta y|^2$

$\alpha^2(x,x)+\beta^2(y,y)+2\alpha\beta(x,y)$ $\quad$ $\alpha^2(x,x)+\beta^2(y,y)-2\alpha\beta(x,y)$ $\Rightarrow$ $\alpha\beta(x,y)=0$

$\downarrow \beta\neq 0$

$\alpha(x,y)=0$ $\leftarrow$ אם $\alpha\neq 0$ אז $(x,y)=0$ ✓

אם $\alpha=0$: $\varphi(x)=-\beta y$, $\varphi(y)=\beta x$ וגם $\alpha^2+\beta^2=1 \Leftarrow \beta=\pm 1$

$(x,y)=(\varphi(x),\varphi(y))=(-\beta y,\beta x)=-\beta^2(x,y)=-(x,y)\rightarrow (x,y)=0$ ✓

המשך יונאריות 20

<u>המשך הוכחת הטענה:</u>

$$|x|^2=(x,x)=(\varphi(x),\varphi(x))=|\alpha x-\beta y|^2=\alpha^2(x,x)+\beta^2(y,y)-\cancel{2\alpha\beta}\overset{(3)}{\cancel{(x,y)}}= \qquad (2)$$

$$=\alpha^2|x|^2+\beta^2|y|^2$$

$$\blacksquare \quad |x|^2=|y|^2 \quad \overset{\beta\neq0}{\Longleftarrow} \quad \underbrace{(1-\alpha^2)}^{\beta^2}|x|^2=\beta^2|y|^2 \quad \Leftarrow$$

<u>הוכחת המשפט</u>: (מתחות הספר)

נוכיח באינדוקציה על $\dim V$.

$\dim V=1$ - ברור.

נניח הוכחנו לכל מימד $<n$. $U:V\to V$. יהי $x+iy$ ו"ע של מרוכב עם ע"ע $\alpha+i\beta$.

תהא $M=\operatorname{span}\{x,y\}\subset V$ U-אינו', כי $\begin{cases} U(x)=\alpha x-\beta y \\ U(y)=\beta x+\alpha y \end{cases}$

אז $M^{\perp}$ U-אינו'. <u>אם $\dim M=1$</u> אזי $U|_M=\pm Id$ (כי שומרת מכפלה פנימית).

זה נותן בסיס מדורג 1 ומספיק הנ"ל על $M^{\perp}$ וסיימנו.

<u>אם $\dim M=2$</u>: