

4. ייחורים 19

נזכר: V - מרחב אוקלידי. $V \rightarrow V: \varphi$ ט"ל. $B_\varphi(x, y) = (x, \varphi y)$ - פונ' ביצורי.

משפט: יהי V מרחב אוקלידי. $\mathcal{B}$ פונ' ביצורי סטנדרט V . אזי קיים סיס אורתונורמלי שבו המטריצה של $\mathcal{B}$ היא אלכסונית.

הוכחה: ז"ל הטענה הקודמת קיימת ט"ל φ צמודה לצמודה ק"פ $B_\varphi(x, y) = (x, \varphi y)$ $\forall x, y \in V$.

נסו φ קיים סיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ ק' שהמטריצה A של φ בסיס זה אלכסונית.

$$A_{ij} = (e_i, \varphi e_j) = \mathcal{B}(e_i, \varphi e_j) = \mathcal{B}(\varphi e_j, e_i) = \mathcal{B}(e_j, \varphi e_i) = A_{ji} \quad \text{כומר בקסיס הזה}$$

$\downarrow$ אלכסונית
 $\uparrow$ המטריצה של φ בקסיס $\{e_i\}$

מסקנה: יהי W מ"ל מעל $\mathbb{R}$ מממד ספ. יהיו $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ פונ' בי"א מימטרים.

נניח $\mathcal{B}_1$ מוצר חזקית. אזי קיים סיס של W שבו המטריצה של $\mathcal{B}_1$ היא I .

והמטריצה של $\mathcal{B}_2$ אלכסונית. (בפרט קיים סיס של W שבו המטריצה של $\mathcal{B}_2$ היא I).

הוכחה: $(W, \mathcal{B}_1)$ - מרחב אוקלידי. לפי המשפט הקודם קיים סיס אורתונורמלי

(ביחס $\mathcal{B}_1$) $e_1, \dots, e_n$ שבו המטריצה של $\mathcal{B}_2$ אלכסונית. בנוסף,

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad \text{ולכן המטריצה של } \mathcal{B}_2 \text{ ביחס זה היא } I$$

טרנספורמציות אורתוגונליות

הצדדני יהי V מרחב אוקלידי. ט"ל $T: V \rightarrow V$ (נקראת טנג' אורתוגונלית אם

זה איזו' של מרחבים אוקלידיים.

$$\text{כומר: } T \text{ אורתו} \iff |Tx| = |x| \quad \forall x \in V.$$

טענה: יהי V מרחב אוקלידי. $T: V \rightarrow V$ ט"ל. אזי הטענות השלול שקולות.

(1) T אורתוגונלית

(2) T מעבירה ס' קסיס אורתונורמליים לקסיס אורתונורמליים

(3) קיים סיס אורתו של T מעבירה אותו לקסיס אורתו.

$$(4) T^* \cdot T = Id \iff T^{-1} = T^*$$

הוכחה: $(1) \iff (2)$ $T: V \rightarrow V$ אורתו. יהי $e_1, \dots, e_n$ סיס אורתונורמלי.

$$\text{ז"ל: } Te_1, \dots, Te_n \text{ סיס אורתונורמלי. } \delta_{ij} = (Te_i, Te_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij} \iff Te_1, \dots, Te_n \text{ סדרה אורתונורמלית}$$

לכן בת"ל. אם היא בת n איברים, ז"ל זה ססט.

$$\sqrt{(3) \Leftrightarrow (2)} \text{ כחור.}$$

$$(4) \Leftrightarrow (3) \text{ יהי } e_1, \dots, e_n \text{ בסיס אורתונורמלי כך } Te_1, \dots, Te_n \text{ בסיס אורתונורמלי.}$$

$$\forall i, j \quad \underbrace{(T^*T - Id)e_i, e_j}_S = 0 \quad \leftarrow (T^*Te_i, e_j) = (Te_i, Te_j) = \delta_{ij} = (e_i, e_j)$$

$$S=0 \quad \text{כי, } (Se_i, e_j)=0 \quad \forall i, j$$

$$\forall x, y \in V: (Sx, y) = (S(\sum_{i,j} x_i e_i), \sum_{j,k} y_j e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j (Se_i, e_j) = 0$$

$$\sqrt{S=0 \Leftrightarrow x \in V \text{ שם } Sx=0 \Leftrightarrow (Sx, y)=0 \quad \forall y}$$

$$(4) \Leftrightarrow (1) \text{ נ"ח } T \Leftrightarrow T^*T = Id \text{ הפכה.}$$

$$(Tx, Ty) = (\underbrace{T^*T}_{Id}x, y) = (x, y) \quad \blacksquare$$

$$\sqrt{\text{נזכר שמתקיים: } S \circ T = Id \text{ , } T \circ S = Id \text{ , } \ker T = \ker(S \circ T) \text{ , } T \text{ חז"ם } T \Leftrightarrow T \text{ איזו' } T \Leftrightarrow T \text{ הפכה}}$$

טענה: יהיו ψ, φ טקס אורתו. אזי $\psi \circ \varphi$ אורתו, וזם ψ^{-1} אורתו.

הוכחה: $\varphi \circ \psi, \psi^{-1}$ הפכות. נשאר לחז"ח שהן שומרות נורמה.

$$|\varphi(\psi(x))| = |\varphi(x)| = |x|; \quad |x| = |\varphi(x)| = |\varphi(\psi(x))| = |\psi(x)| = |x|$$

$$x = \varphi y \Leftrightarrow y = \psi^{-1}x$$

הצגה: מטריצה ממטית חסימת U נקראת אורתוגונלית אם $U^t U = Id$.

טענה: V מרחב אוקלידי. $T: V \rightarrow V$ טל. הצגות המאוג שנקות.

(1) T אורתו.

(2) בסיס אורתו המטריצה של T אורתו.

(3) קיים בסיס אורתו שבו המטריצה של T אורתו.

הוכחה: (2) $\Leftrightarrow$ (1) נתון T אורתו $\Leftrightarrow T^*T = Id$. תהי U המטריצה של T בסיס אורתו.

מכאן אזי המטריצה של $T^* = U^t$. אז $U^t U = Id$.

(3) $\Leftrightarrow$ (2) כחור. בסיס אורתו $[e]$ $U^t U = Id$ $\Leftrightarrow T^*T = Id$.

! מטריצת סיבוב ב- q° של המישור: $\begin{bmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{bmatrix}$ (הוא לא זכרנו?).

אין אף q ! תמונה של וקטור אינה פחפחצונית (אז $0 < \alpha < 180$).

משפט: תהי $T: V \rightarrow V$ טל אורתו. אזי קיים בסיס אורתונורמלי $e_1, \dots, e_n$ שבו המטריצה

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & & \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ & & & \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix}$$

של T היא:

המטרה: מיון מרחב 19

מטרה מסוימת: $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ מ"צת סבוב של מישור?

אינטואיציה גאומטרית:

מ"צת סבוב של מישור? $(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$

אינטואיציה גאומטרית:

(הוכחה המשפט בשיעור הבא)

- טענה (1) אם U מטריצה אורתוגל אזי $\det U = \pm 1$
- (2) אם $V \rightarrow V$ טרנס' אורתוגל אזי $\det T = \pm 1$
- הוכחה: (1) $\Leftrightarrow$ (2) ברור.

נכית את (1): $(\det U)^2 = \det U^t \det U = \det(U^t U) = \det I = 1 \leftarrow U^t U = I$

$\det U = \pm 1$

נראה מתקדם פה של המשפט עבור $n=2$:

האפשרויות הן: $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ו- $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

אכן ב- $\mathbb{R}^2$ יש לנו 2 אפשרויות בקבוצה:

סבוב: $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

שיקוף: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\det = \cos^2 + \sin^2 = 1$

$\det = -1$

הרכבה של שיקוף עם סבוב: $-1 \cdot -1 = 1$

הרכבה של שני שיקופים היא סבוב, כי $-1 \cdot -1 = 1$

הרכבה של שיקוף וסבוב היא שיקוף, כי הדיטרמיננטה יוצאת -1.

תכונה: $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ הרכבה אורתוגלית עם $\det = -1$

כוונתו שיהיה שיקוף, מצבוא את ציר הסיקוף.