

משפט: יהי V מרחב אוקלידי. $\varphi: V \rightarrow V$ ט"ל.

$$(1) \text{ קיימת ויחידה ט"ל } \psi: V \rightarrow V \text{ כך ש-} (\varphi x, y) = (x, \psi^* y) \quad \forall x, y \in V$$

$$(2) \quad (\psi^*)^* = \varphi$$

$$(3) \quad (\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*, \quad (\lambda \varphi + \mu \psi)^* = \lambda \varphi^* + \mu \psi^*$$

$$(4) \quad \varphi \text{ הפיכה אזי } \psi^* \text{ הפיכה ו-} (\psi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$$

המשקל הרוחרי: (1) - שיטת קרס.

$$(2) \quad (\varphi x, y) = (x, \varphi^* y)$$

$$(y, (\varphi^*)^* x) = (\varphi^* y, x) = (y, \varphi x)$$

$$(y, \underbrace{((\varphi^*)^* - \varphi)x}_a) = 0, \quad \forall x, y \in V$$

$$(y, a) = 0 \quad \forall y \in V \Rightarrow a = 0 \Rightarrow ((\varphi^*)^* - \varphi)x = 0 \quad \forall x \in V$$

$$\Downarrow$$

$$(\varphi^*)^* = \varphi \quad \checkmark$$

$$* \quad ((\lambda \varphi + \mu \psi)x, y) = (\lambda \varphi(x) + \mu \psi(x), y) = \lambda (\varphi(x), y) + \mu (\psi(x), y) = \lambda (x, \varphi^*(y)) + \mu (x, \psi^*(y))$$

$$= (x, (\lambda \varphi^* + \mu \psi^*)y) \quad (3)$$

$$\forall x, y \in V: \quad (x, (\lambda \varphi^* + \mu \psi^*)y) = ((\lambda \varphi + \mu \psi)x, y) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \lambda \varphi^* + \mu \psi^* = (\lambda \varphi + \mu \psi)^* \quad \checkmark$$

$$* \quad ((\varphi \circ \psi)x, y) = (x, (\varphi \circ \psi)^* y)$$

$$\Downarrow$$

$$(\varphi(\psi(x)), y) = (\psi(x), \varphi^*(y)) = (x, \psi^*(\varphi^*(y))) = (x, (\psi^* \circ \varphi^*)y)$$

$$\Rightarrow (\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^* \quad \checkmark$$

$$(4) \quad (\varphi^{-1})^* \circ \varphi^* \stackrel{(3)}{=} (\varphi \circ \varphi^{-1})^* = Id^* = Id, \quad \varphi \circ \varphi^{-1} = Id \quad \text{(משקל זוגי)}$$

$$\varphi^* \text{ הפיכה ו-} (\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1} \quad \checkmark$$

טענה: יהי V מרחב אוקלידי. $\varphi: V \rightarrow V$ ט"ל. אזי בט קסם אורתונורמלי

ב- V המטריצה של φ^* בקסם זה שווה למטריצה המשוחזרת של φ .

הערה: $\varphi: V \rightarrow V$ ט"ל. $e_1, \dots, e_n \in V$ קסם אורתונורמלי. יהי A

$$\varphi(e_j) = \sum_{p=1}^n A_{pj} e_p$$

המטריצה של φ בקסם הזה

$$(\varphi(e_j), e_i) = \left(\sum_{p=1}^n A_{pj} e_p, e_i \right) = \sum_{p=1}^n A_{pj} \overbrace{(e_p, e_i)}^{\delta_{pi}} = A_{ij}$$

ניפול סקלרית ב- e_i

$$A_{ij} = (e_i, \varphi(e_j)) \quad \text{וקבולנו:}$$

הוכחת הטענה: תהי A המטריצה של ψ , B המטריצה של ψ^* .

$$B_{ij} = (e_i, \psi^* e_j) = (\psi e_i, e_j) = (e_j, \psi e_i) = A_{ji} \Rightarrow B = A^t$$

טענה: יהי V מרחב אנליטי. $\psi: V \rightarrow V$ סגור, $M \subseteq V$ תת-מרחב אנליטי.

אזי $M^\perp$ הוא ψ^* אנליטי.

הוכחה: צ"ל שכל $x \in M^\perp$, $\psi^* x \in M^\perp$. סומר על $y \in M$: $(\psi^* x, y) \stackrel{?}{=} 0$

$$(x, \psi(y)) \stackrel{||}{=} 0 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ x \in M^\perp \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ y \in M \end{matrix} \quad \text{כי } M^\perp \text{ ו-} M \text{ אנליטי}$$

ט"ו צמודות מעצמן

הצגה: יהי V מרחב אנליטי. $\psi: V \rightarrow V$ סגור (קראת צמודה עצמה אם $\psi^* = \psi$).

$$\text{כימור} \quad (\psi x, y) = (x, \psi y) \quad \text{על } x, y \in V$$

טענה: $\psi: V \rightarrow V$ סגור. הטענות הבאות שקולות:

(1) ψ צמודה עצמה

(2) המטריצה של ψ בטו קבוע אורתונורמלי היא סימטרית.

(3) קיים קבוע אורתונורמלי שבו המטריצה של ψ היא סימטרית.

הוכחה: $[1 \Leftarrow 2]$ נתון $\psi^* = \psi$. יהי $[e]$ קבוע אורתונורמלי. כושרו. תהי A המטריצה

של ψ בקבוע הזה. אז המטריצה של $\psi^* = \psi$ בקבוע הזה שמה A^t . משום של $\psi^* = \psi$

$$A^t = A \quad \leftarrow$$

$[3 \Leftarrow 2]$ בחור.

$[1 \Leftarrow 3]$ $e_1, \dots, e_n$ קבוע אורתונורמלי שבו המטריצה A של ψ היא סימטרית.

$$\square \quad \psi = \psi^* \quad \leftarrow \quad A = A^t \quad \text{שמה } \psi^* = \psi$$

טענה: תהי M תת-מרחב אנליטי. $M \subseteq V$ צמודה עצמה אם $M^\perp \subseteq M^\perp$ ו- M אנליטי.

(מקרה פסי של הקדמה).

משפט: יהי V מרחב אנליטי. $\psi: V \rightarrow V$ צמודה עצמה. אז קיים קבוע אורתונורמלי

של וקטורים עצמיים של ψ (שמה קבוע עצמי)

המונח מינורית 18

(הוכחת המשפט): באינדוקציה על $k = \dim V$

$k=1$ - ברור

$k=2$: יהי e_1, e_2 בסיס אורתונורמל בשהו של V (המטריצה של ψ בסיס זה

$$P_\psi(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 \leftarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$D = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2 + c^2 - 4b^2 \geq 0 \Rightarrow \text{יש שם ממשי!}$$

היחסים וזו V עם שם ψ וגר. ניתן לנרמט ול כך $\|v\|=1$. נסמן $M = \text{span}\{v_1\}$.

$M^\perp$ שם ψ איננו כי ψ צמוד צמוד.

מכפלה פנימית $\langle M^\perp = \text{span}\{v_2\} \mid v_2=1 \rangle$ $\dim M^\perp = 1$ $V = M \oplus M^\perp$ $v_2 \in M^\perp$ קיבל $\psi(v_2) \in M^\perp$

$\psi(v_2) = \lambda_2 v_2$ $\psi(v_2) \in M^\perp$ $\psi(v_2) = \lambda_2 v_2$ $\psi(v_1) = \lambda_1 v_1$ $\psi(v_2) = \lambda_2 v_2$

אכן זהו בסיס אורתונורמלי. $\psi(v_1) = \lambda_1 v_1$ $\psi(v_2) = \lambda_2 v_2$

v_1, v_2 בסיס אורתונורמלי של V .

3.3 האינדוקציה. נניח כי המשפט מתקיים לכל מרחב אינרטי $\leq n$. נניח $n+1$.

$V \rightarrow V$ ψ . פדם הוכחנו שקיים תלם ψ -אינרטי M של V ממידת 1 או 2.

אז $M^\perp$ שם ψ אינרטי. אז $V = M \oplus M^\perp$. נבחר M קיים בסיס e_1, e_2 אורתונורמלי

של M (מבסיס האינדוקציה), וזה $M^\perp$ קיים בסיס אורתונורמלי $e_3, \dots, e_n$

אז $e_1, \dots, e_n$ בסיס אורתונורמלי של V של ψ $\square$

טענה: יהי $\psi: V \rightarrow V$ צמודה צמודה אזי והסורף עזמי"ם עם שם ψ (הפ

מיונים זה נדרש.

$$\text{הוכחה: } \psi v_1 = \lambda_1 v_1, \psi v_2 = \lambda_2 v_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\lambda_1(v_1, v_2) = (\lambda_1 v_1, v_2) = (\psi v_1, v_2) = (v_1, \psi v_2) = (v_1, \lambda_2 v_2) = \lambda_2(v_1, v_2)$$

$$\square \quad (v_1, v_2) = 0 \quad \leftarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\psi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{המטריצה בסיס סטנדרט} \leftarrow \text{צמודה צמודה}$$

$$P_\psi(\lambda) = (a-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-1)(\lambda-3) \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=3$$

$$\text{נמצא וזו: } v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ נסמן } v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v_1 = 0$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ נסמן } v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} v_2 = 0$$

v_1, v_2 בסיס אורתונורמלי. המטריצה של ψ בקבוצה זה היא: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$B_e(x, y) = (x, \psi y) \quad B_e: U \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{נצייר} \quad \psi: V \rightarrow V \quad \psi \neq 0$$

B_e פונקטור בלינאר.

טענה: (1) ψ איז פאן ביליניאר ווייזט ווייזט $\psi: V \rightarrow V$ $\psi \neq 0$ B_e

(2) B_e סימטריש $\Leftrightarrow \psi$ פאונדירטאליזירט.

פרייז:

$$x, y \quad (x, \psi y) = (y, \psi x) \Leftrightarrow B_e \text{ סימטריש} \quad B_e(y, x) = (y, \psi x) \quad (2)$$

$$\psi = \psi^* \Leftrightarrow x, y \quad (x, \psi y) = (x, \psi^* y) \Leftrightarrow$$

$$B = B_{\psi_1} = B_{\psi_2} \quad (1) \text{ יחידות } \psi: U \rightarrow V$$

$$\forall x, y \quad (x, \psi_1 y) = (x, \psi_2 y) \Rightarrow (x, (\psi_1 - \psi_2)y) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\psi_1 = \psi_2$$

דיון: נחמד קסט אומד $e_1, \dots, e_n \in V$ $\xi(x, y) = (x, \psi y)$ ψ A $B_{ij} = \xi(e_i, e_j) = (e_i, \psi e_j) = A_{ij} \rightarrow$ ψ A $B_{ij} = \xi(e_i, e_j) = (e_i, \psi e_j) = A_{ij} \rightarrow$ ψ A $B_{ij} = \xi(e_i, e_j) = (e_i, \psi e_j) = A_{ij} \rightarrow$

$$\psi(e_j) = \sum_{i=1}^n B_{ij} e_i \quad \text{(נצייר } \psi \text{ פאונדירטאליזירט)}$$

$$\xi(x, y) = \left(\sum_p x_p e_p, \sum_q y_q e_q \right) = \sum_{p,q} x_p y_q B_{pq}$$

$$(x, \psi y) = \left(\sum_p x_p e_p, \psi \left(\sum_q y_q e_q \right) \right) = \sum_{p,q} x_p y_q (e_p, \psi e_q) = \sum_{p,q} (e_p, \sum_i B_{iq} e_i) =$$

$$= \sum_{p,i,q} x_p y_q B_{iq} (e_p, e_i) = \sum_{p,i,q} x_p y_q B_{pq}$$

$$\square \quad \xi(x, y) = (x, \psi y)$$