לינארית 17 ~~18~~

V מרחב מכפלה פנימית

$x_1,\dots,x_n\in V$ בת"ל $\overset{\text{השונו}}{\rightsquigarrow}$ $e_1,\dots,e_n$ אורתונורמלית, כך שכל $1\le k\le n$

$$\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_k\}=\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_k\}$$

יחידות כך ש- $(e_k,x_k)>0$.

אלגוריתם גרם שמידט:

אינדוקציה: $e_1=\frac{x_1}{|x_1|}$.

נניח מצאנו $\overbrace{e_1,\dots,e_{l-1}}^{\text{אורתונורמלית}}$. אז לכל $k\le l-1$: $\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_k\}=\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_k\}$

רוצים למצוא e_l . $(e_l,x_k)=0$ לכל $k\le l-1$

$$\Updownarrow$$

$$e_l\perp\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_l\}=\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_l\}$$

$$\Updownarrow$$

$(e_1,e_l)=\dots=(e_{l-1},e_l)=0$. $|e_l|=1$.

בפרט $\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_l\}=\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_l\}$ $e_l\in\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_{l-1},x_l\}=\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_{l-1},\cancel{x_l}\}$

נסמן $e_l=\alpha_1e_1+\dots+\alpha_{l-1}e_{l-1}+\beta x_l$, $\beta\neq0$.

כאשר $\gamma_j=\frac{\alpha_j}{\beta}$ $e_l'=\gamma_1e_1+\dots+\gamma_{l-1}e_{l-1}+x_l \Leftarrow e_l'=\frac{e_l}{\beta}$

$(e_l',e_j)=0$ לכל $1\le j\le l-1$.

בילינאריות

$$(\gamma_1e_1+\dots+\gamma_{l-1}e_{l-1}+x_l,e_j)=0$$

$$\sum_{i=1}^{l-1}\gamma_i\underbrace{(e_i,e_j)}_{\delta_{ij}}+(x_l,e_j)=0\Rightarrow\gamma_j=-(x_l,e_j)$$

$$e_l'=-\sum_{i=1}^{l-1}(x_l,e_i)e_i+x_l$$

נבדוק $(e_l',e_j)=0$ עבור $j\le l-1$:

$$(e_l',e_j)=\left(-\sum_{i=1}^{l-1}(x_l,e_i)e_i+x_l,e_j\right)=-\sum_{i=1}^{l-1}(x_l,e_i)(e_i,e_j)+(x_l,e_j)=-(x_l,e_j)+(x_l,e_j)=0$$

נבדוק גם ש- $\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_{l-1},e_l'\}\overset{?}{=}\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_l\}$

$\overset{??}{=}\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_{l-1},x_l\}$

ברור ש- $\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_{l-1},e_l'\}\subset\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_{l-1},x_l\}$ כי e_l' צ"ל של הוקטורים מימין.

הכלה בכיוון השני: $\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_{l-1},x_l\}\overset{?}{\subset}\mathrm{span}\{e_1,\dots,e_{l-1},e_l'\}$ ו- $x_l=\sum_{i=1}^{l-1}(x_l,e_i)e_i+e_l'$ ✓

שייכים

לכן נרמל ונקבל $e_l:=\frac{e_l'}{|e_l'|\neq0}$ $\neq0$.

משפט: יהי V מרחב אוקלידי. תהי $e_1,\dots,e_k$ סדרה אורתונורמלית.

אזי ניתן להשלים אותה לבסיס אורתונורמלי של V.

הוכחה:

$e_1,\dots,e_k$ בת"ל. נשלים אותה לבסיס ע"י $x_{k+1},\dots,x_n$. (נפל:)

גרם שמידט על הסדרה $\underbrace{e_1,\dots,e_k}_{\text{אנכיות גרם שמידט לא ישנה והטורים אלה שהם כבר אורתונורמלים}},x_{k+1},\dots,x_n$

$\Big\downarrow$ גרם שמידט

$e_1,\dots,e_k,e'_{k+1},\dots,e'_n$ ⇐ אורתונורמלית ⇐ בת"ל ⇐ בסיס

מתאים לדרים

∎

מיון של מרחבים אוקלידיים עד כדי איזומורפיזם

הגדרה: יהיו V,W מרחבי מכפלה פנימית. ט"ל $T:V\to W$ נקראת **איזו' של מרחבי מכפלה פנימית** אם T איזו' של מרחבים וקטוריים

וגם $\forall x,y\in V.\ (T(x),T(y))_W=(x,y)_V$

טענה: (1) הרכבה של איזו' מרחבי מ"פ היא איזו' ממ"פ

(2) ההופכית (T^{-1}) ______ " ______.

טענה: יהיו V,W מרחבים אוקלידיים, $\dim V=\dim W$. $T:V\to W$ ט"ל. אזי התנאים הבאים שקולים:

(1) T איזו' של מרחבים אוקלידיים (ממ"פ נוצר סופי)

(2) T שומר על $|Tx|_W=|x|_V \quad \forall x\in V$

(3) T שומר על מכפלה פנימית $\forall x,y\in V\ (Tx,Ty)_W=(x,y)_V$

הוכחה:

$\boxed{1\Rightarrow 2}$ ברור.

$\boxed{2\Rightarrow 3}$ $\forall x,y\ \ (T(x+y),T(x+y))=(x+y,x+y)=\cancel{(x,x)}+\cancel{(y,y)}+2(x,y)$

$\overset{\parallel}{\cancel{(Tx,Tx)}+\cancel{(Ty,Ty)}+2(Tx,Ty)} \Rightarrow \forall x,y\ \ (Tx,Ty)=(x,y)$

$\boxed{1\Leftarrow 3}$ צ"ל T איזו' של מ"ו $\iff$ $\operatorname{Ker}T=\{0\}$

יהי $x\in \operatorname{Ker}T$. $Tx=0 \Leftarrow 0=|Tx|=|x| \Leftarrow x=0$

∎

המשך יוניטרית:

<u>הגדרה</u>: ממ"פ V נקרא איזומורפי לממ"פ W אם קיים איזו' של ממ"פ.

<u>טענה</u>: רפלקסיביות איזו', טרנזיטיביות ", סימטריות " $\Big\}\Rightarrow$ איזומורפיזם הוא יחס שקילות

<u>משפט</u>: שני מרחבים אוקלידיים איזו' $\Leftrightarrow$ יש להם אותו מימד

<u>הוכחה</u>: $\boxed{\Leftarrow}$ ברור.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח $\dim V=\dim W=n$. נקבע בסיסים אורתונורמליים $T:V\to W$

$T(x_1v_1+\dots+x_nv_n)=x_1w_1+\dots+x_nw_n$ וזה עובד ✓ (אפשר לבדוק שהוא משמר מ"פ).

<u>משפט Riesz</u>: יהי V מרחב אוקלידי. לכל $\xi\in V^*$ קיים ויחיד $a\in V$ כך ש- $\xi(x)=(x,a)$ $\forall x\in V$.

<u>הוכחה</u>:

נתבונן בהעתקה $S:V\to V^*$ המוגדרת: $\forall x,a\in V:$ $(S(a))(x)=(x,a)$

$[S(a)=\lambda x\in V.(x,a)]$

צ"ל: S חח"ע ועל. ראשית נוכיח שהיא לינ'.

$$S(\lambda a+\mu b)\overset{?}{=}\lambda S(a)+\mu S(b)\Leftrightarrow\forall x.\ (S(\lambda a+\mu b))(x)\overset{?}{=}(\lambda S(a)+\mu S(b))x$$
$$(x,\lambda a+\mu b)\overset{\checkmark}{=}\lambda(x,a)+\mu(x,b)$$

בנוסף ידוע ש- $\dim V=\dim V^*$, לכן נראה S חח"ע וזה יספיק.

יהי $a\in\ker S$. $S(a)=\theta_{V^*}$ $\Leftarrow$ $\forall x.\ (x,a)=0$

בפרט. $|a|^2=(a,a)=0$ לכן $a=\theta$, היינו, $\ker S=\{\theta\}$ $\Leftarrow$ S חח"ע ■

(אגב נזכיר לינארית 1: משפט המימד $\dim\ker S+\dim\operatorname{Im}S=\dim V=n$

לכן $\operatorname{Im}S=W$ ו-S על. נראה ש-S חח"ע: $S(x)=S(y)\Rightarrow S(x-y)=\theta\Rightarrow x-y=0\Rightarrow x=y$)

<u>משפט</u>: יהי V מרחב אוקלידי.

1. לכל ט"ל $T:V\to V$ קיימת ויחידה ט"ל $T^*:V\to V$ "המוצמדת של T" כך ש- $\forall x,y\in V$ $(Tx,y)=(x,T^*y)$
2. $(T^*)^*=T$
3. $(T\circ S)^*=S^*\circ T^*$, $(\lambda T+\mu S)^*=\lambda T^*+\mu S^*$
4. אם T הפיכה אז גם T^* הפיכה ומתקיים: $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$

הוכחה:

① יחידות: נניח $T^*, \tilde{T}$ מקיימות: $(Tx,y)=(x,T^*y)=(x,\tilde{T}y)$

$$\forall x,y\in V \quad (x,\ T^*y-\tilde{T}y)=0 \Rightarrow \forall y\in V \quad (T^*-\tilde{T})y=\theta$$

$$\Downarrow$$

$$T^*-\tilde{T}=\theta \Rightarrow T^*=\tilde{T} \quad \checkmark$$

קיום: נקבע $y\in V$. נתבונן בפונ' ליניארי על V: $x \xmapsto{\xi_y} (Tx,y)$

ולפי משפט Riesz קיים ויחיד פונ' ליניארי מ-V^* שנסמנו T^*y כך ש-

$\forall x\in V.\ \xi_y(x)=(x,T^*y)$.

כעת $y\longmapsto T^*y$ זו פונקציה $V\to V$ נוכיח שזו ט"ל:

$$T^*(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)\overset{?}{=}\lambda_1T^*(y_1)+\lambda_2T^*(y_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x\in V \quad . \quad (x,\ T^*(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2))\overset{?}{=}\lambda_1(x,T^*y_1)+\lambda_2(x,T^*y_2)$$

$$(Tx,\ \lambda_1y_1+\lambda_2y_2)\overset{\checkmark}{=}\lambda_1(Tx,y_1)+\lambda_2(Tx,y_2)$$

$\boxtimes$