לינארית 16

משפט יעקובי: תהי $b(x_1,\dots,x_n)$ תבנית ריבועית על F^n מדרגה r.
אזי ניתן להביא את b לצורה $\lambda_1 y_1^2+\dots+\lambda_r y_r^2$ בעזרת החלפת משתנים
עם מטריצה C משולשת עליונה עם 1-ים באלכסון $\iff \Delta_1,\dots,\Delta_r\neq 0$.
במקרה זה $\lambda_i=\frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$ $\quad i=1,\dots,r$ (כאשר $\Delta_0=1$)

תזכורת:

למה 1: יהיו $[e]=[e_1,\dots,e_n]$, $[e']=[e'_1,\dots,e'_n]$ שני בסיסים של V. אזי C משולשת עליונה
$\iff Span\{e_1,\dots,e_k\}=Span\{e'_1,\dots,e'_k\}$ לכל $k=1,\dots,n$.

למה 2: תהי C מטריצה משולשת עליונה שהיא מטריצת מעבר מ- $[e]$ ל- $[e']$.
יהיו B,B' מטריצות של תבנית ריבועית b בבסיס $[e],[e']$ בהתאמה.
אזי $B'_k=C_k^t B_k C_k$ לכל $k=1,\dots,n$.

הוכחת משפט יעקובי: $\boxed{\Rightarrow}$ נוכיח באינדוקציה על r.

$r=0 \Rightarrow b=0$ אין מה להוכיח.

$r-1\Rightarrow r$ ($r\geq 1$): כי $b_{11}=\Delta_1\neq 0$ (נתון). נעשה שינוי משתנים כמו בלגרנז':
$$\begin{cases}x_1=x_1'-\frac{b_{12}}{b_{11}}x_2'-\dots-\frac{b_{1n}}{b_{11}}x_n'\\ x_2=x_2'\\ x_n=x_n'\end{cases}$$
מטריצת המעבר היא $C=\begin{bmatrix}1&-\frac{b_{12}}{b_{11}}&\cdots&-\frac{b_{1n}}{b_{11}}\\ &\ddots&&0\\ 0&&&1\end{bmatrix}$ משולשת עליונה

ו- $b(x_1',\dots,x_n')=b_{11}{x_1'}^2+\sum_{2\leq i\leq j\leq n} b'_{ij}x'_ix'_j \Leftarrow B'=\begin{bmatrix}b_{11}&0\\0&*\end{bmatrix}$

נרצה להמשיך להפעיל את השיטה על, אבל יש לוודא ש- b'_{22} לא מתאפס.

לפי למה 2, $B'_k=C_k^t\cdot B_k\cdot C_k \Leftarrow \det B'_k=(\det C_k)^2(\det B_k)$
$(\det C_k)^2 = 1 \Leftarrow$ מטריצה משולשת יחידה

$\Leftarrow \Delta'_k=\Delta_k\ \forall k=1..n$. נשים לב כי $b'_{22}=\frac{\Delta'_2}{b_{11}}=\frac{\Delta_2}{b_{11}}\neq 0$ וכו' בצעד.

לפי הנחת האינדוקציה קיים שינוי קואורדינטות $C'\begin{bmatrix}x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$ $\leftarrow$ $(n-1)\times(n-1)$ משולשת יחידה

והתבנית נראית כך ($y_1=x_1'$): $b(y_1,y_2,\dots,y_n)=\lambda_1y_1^2+\dots+\lambda_ry_r^2$

הערה: $\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=C''\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$
מכפלה של 2 מטריצות משולשות יחידה, ולכן C'' עצמה כזו.
מטריצות המעבר $\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x_1'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}x_1'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$

אם נסמן ב- B'' את התבנית בבסיס $(y_1,\dots,y_n)$: $\begin{bmatrix}\lambda_1&&&0\\&\ddots&&\\&&\lambda_r&\\0&&&0\end{bmatrix}$. $\quad B''=C''^tBC''$

עפ"י למה 2: $\det B''_k=(\det C''_k)^2\underbrace{\det B_k}_{\Delta_k} \Leftarrow \lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_k=\Delta_k$

אם $k\leq r$: $\begin{matrix}\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_k=\Delta_k\\ \lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_{k-1}=\Delta_{k-1}\end{matrix} \Rightarrow \lambda_k=\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ ✓

$$B' = C^t B C = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{\dim V}\end{bmatrix}$$ כי $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \neq 0$, $rk\, b = r$

ומתקיים: $k \le r$, $\Delta_k = \det B_k = \det B'_k = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k \neq 0$ ∎

<u>הגדרה</u>: שתי תבניות ריבועיות b, b' נקראות שקולות אם קיימים בסיסים $[e], [e']$ כך שהמטריצה של b ב- $[e]$ שווה למטריצה של b' ב- $[e']$.

⚠ <u>הערה</u>: אם $b \sim b'$ אזי $rk(b) = rk(b')$. האם גם ההפך נכון?

נניח F סגור אלגברית. $b = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2$, $r = rk\, b$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \neq 0$

נגדיר $z_1 = \sqrt{\lambda_1} y_1, \ldots, z_r = \sqrt{\lambda_r} y_r, z_{r+1} = y_{r+1}, \ldots, z_n = y_n$ $\Leftarrow$ b שקולה ל- $z_1^2 + \ldots + z_r^2$

(מותר לקחת $\sqrt{}$ כי השדה סגור אלגברית)

($\lambda_i \neq 0$ לכן זו החלפת משתנים הפיכה)

ולכן במקרה זה רק הדרגה משנה!

<u>משפט</u>: מעל שדה סגור אלגברית, שתי תבניות ריבועיות שקולות $\Leftrightarrow$ דרגתן זהה.

<u>בהשוואות</u>:

<u>$F = \mathbb{R}$</u>

<u>$V = \mathbb{R}^1$</u>: $b(x) = ax^2$.
$a = 0 \Rightarrow b = 0$
$a \neq 0 \Rightarrow rk\, b = 1$.

נקח $y = cx$, $c \neq 0$.
$$b(y) = \frac{a}{c^2} y^2$$

$\frac{1}{c^2} \neq -1$

$a > 0 \Rightarrow c = \sqrt{a} \rightsquigarrow b(y) = y^2$
$a < 0 \Rightarrow c = \sqrt{|a|} \rightsquigarrow b(y) = -y^2$

עד כדי שקילות $0, y^2, -y^2$.

⊛ נסדר כך
$$b(y) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 = \underbrace{\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_p y_p^2}_{\lambda_i > 0} + \underbrace{\lambda_{p+1} y_{p+1}^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2}_{\lambda_i < 0}$$
$i \le p$

נעשה החלפת משתנים: $z_i = \sqrt{|\lambda_i|}\, y_i$, $1 \le i \le r$; $z_i = y_i$ $i > r$

נקבל: $= z_1^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_r^2$

קיבלנו שמעל $\mathbb{R}$ כל תבנית ריבועית ניתן להביא לצורה:

$$\boxed{b(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2}\,,$$ $\leftarrow$ <u>צורה הנורמלית של b</u>
$r = rk\, b$.

$p = \#\{+\}$ = <u>אינדקס אינרציה חיובי</u> ; $r - p = \#\{-\}$ = <u>אינדקס אינרציה שלילי</u>.

<u>סיגנטורה</u> = $\sigma = \#\{+\} - \#\{-\}$

<u>משפט</u>: אינדקסי האינרציה (חיובי ושלילי) לא תלויים בבחירת הבסיס המנרמל.

הוכחה ↓

המשך יוניטריות 16.3

<u>הוכחת המשפט</u>:

נניח ל-b מבסיס אחר יש צורה: $b=z_1^2+\dots+z_s^2-z_{s+1}^2-\dots-z_r^2$ (בסיס $e_1',\dots,e_n'$)

נניח בשלילה $s\ne p$, בה"כ $s<p$ (זו שלילה מספיקה כי קבוע בסיס $\mathrm{rk}\,b=\#\{+\}+\#\{-\}$).

$$M=\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_p\}\ ,\quad M'=\operatorname{span}\{e_{s+1}',\dots,e_n'\}$$

$\dim M=p$, $\dim M'=n-s$ $\Leftarrow$ $\dim M+\dim M'=p+n-s\underset{p>s}{>}n$

$\Leftarrow$ $M\cap M'\ne\{\theta\}$.

יהי $\theta\ne x\in M\cap M'$. מצד אחד: $b(x)\overset{x\in M}{=}x_1^2+\dots+x_p^2+0\dots0\overset{x\ne\theta}{>}0$

מצד שני: $b(x)\overset{x\in M'}{=}0+\dots+0-z_{s+1}^2-\dots-z_r^2\le0$ $\Leftarrow$ סתירה, לכן $\underline{\underline{p=s}}$

וכן א.ה. שלילי $=$ {א.ה. חיובי} $-\,r$ ∎

<u>מסקנה</u>: מעל שתי תבניות ריבועיות שקולות $\Leftrightarrow$ יש להן אותם אינדקס אינרציה חיובי ושלילי.

⚠ מכאן והלך הכל מעל $\mathbb{R}$

<u>הגדרה</u>:[1] תבנית ריבועית b נקראת מוגדרת חיובית אם לכל $x\ne\theta$, $b(x)>0$.

2. פונקי בילינ' סימטרי ξ נקרא מוגדר חיובי אם התבנית הריבועית המתאימה מוגדרת חיובית.

(כלומר $\xi(x,x)>0$ לכל $x\ne\theta$). $\leftarrow$ זהו מכפלה פנימית.

⚠ b מוגדרת חיובית $\Leftrightarrow$ הצורה הקנונית שלה: $b(x)=x_1^2+\dots+x_n^2$.

<u>הגדרה</u>: מטריצה ממשית סימטרית B נקראת מוגדרת חיובית אם התבנית הריבועית שמתאימה לה היא מוגדרת חיובית. כלומר, $\sum_{i,j}B_{ij}x_ix_j>0$ אם $(x_1,\dots,x_n)\ne\vec{0}$.

<u>טענה</u>: מטריצה ממשית סימטרית $\overset{B}{}$ מוגדרת חיובית $\Leftrightarrow$ קיימת הצגה $B=C^tC$ כאשר C ממשית הפיכה.

<u>הוכחה</u>: נתבונן בתבנית הריבועית $b(x)=\sum_{i,j}B_{ij}x_ix_j$. b מוגדרת חיובית $\Leftrightarrow$ הצורה הקנונית של $b=z_1^2+\dots+z_n^2$. $\Leftrightarrow$ קיימת מטריצה הפיכה C ק.ש. $B=C^tI\cdot C$ ∎

<u>מסקנה</u>: אם B מוגדרת חיובית אזי $\det B>0$.

הוכחה: $\det B=(\det C)^2>0$ כי C הפיכה ∎

משפט (סילבסטר): תהי B מטריצה ממשית סימטרית. אזי B מוגדרת חיובית

$\Leftrightarrow$ $\Delta_k>0$ לכל $k=1,..,n$.

הוכחה:

$\boxed{\Leftarrow}$ תהי b תבנית ריבועית מתאימה. B - המטריצה של b בבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$.

נצמצם b על $\mathrm{span}\{e_1,..,e_k\}$. המטריצה של הצמצום הזה בבסיס $e_1,..,e_k$ = B_k.

הצמצום הוא גם תבנית מוגדרת חיובית. לכן לפי הטענה הקודמת $\overbrace{\Delta_k}^{\det B_k}>0$ לכל k. ✓

כיוון שני בשיעור הבא.

לינארית 16

<u>תזכורת</u>: $B_{n\times n}$ סימטרית נקראת מוגדרת חיובית אם לכל $(x_1,\dots,x_n)\neq\vec{0}$ א-ה

$\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}x_ix_j>0$.

<u>משפט סילבסטר</u>: מטריצה סימטרית $B_{n\times n}$ היא מוגדרת חיובית $\iff$ $\Delta_k>0$ לכל $k=1,\dots,n$

$\boxed{\Leftarrow}$ הוכחנו

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח $\Delta_1,\dots,\Delta_n>0$. לפי משפט יעקובי קיים בסיס של $\mathbb{R}^n$ שבו התבנית

$b=\sum B_{ij}x_ix_j$ נראית: $b=\underbrace{\Delta_1}_{>0}\cdot y_1^2+\dots+\underbrace{\Delta_n}_{>0}\cdot y_n^2>0$

אם $(y_1,\dots,y_n)\neq\vec{0}$

☑

תהי b תבנית ריבועית, ו-ξ פונ' בילינארית שמגדירה את b, כלומר $b(x)=\xi(x,x)$ $\forall x\in V$

<u>הגדרה</u>: $x_1,\dots,x_k\in V$. $B_b(x_1,\dots,x_k):=\begin{bmatrix}\xi(x_1,x_1)&\cdots&\xi(x_1,x_k)\\ \vdots&&\vdots\\ \xi(x_k,x_1)&\cdots&\xi(x_k,x_k)\end{bmatrix}_{k\times k}$ - מטריצת גרם.

⚠ הערה- מטריצת גרם היא סימטרית

<u>משפט</u>: אם b תבנית ריבועית מוגדרת חיובית אזי $\det B_b(x_1,\dots,x_n)\geq0$

והשוויון מתקבל $\iff$ $x_1,\dots,x_n$ תלויים לינארית.

<u>מסקנה</u>- אם $x_1,\dots,x_n$ בת"ל אזי מטריצת גרם מוגדרת חיובית.

<u>הוכחת המסקנה</u>: לכל $k=1,\dots,n$ הסדרה $x_1,\dots,x_k$ בת"ל, לכן לפי משפט קודם

$\underbrace{\det B_b(x_1,\dots,x_k)}_{\Delta_k \text{ של מטריצת גרם}}>0$ $\Leftarrow$ לפי סילבסטר מטריצת גרם מוגדרת חיובית

☑

<u>הוכחת המשפט</u>:

<u>מקרה 1</u>: $x_1,\dots,x_n\in V$ בת"ל. $\Leftarrow$ $x_1,\dots,x_n$ בסיס של $\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_n\}$.

מטריצת גרם זהות מטריצה של הצמצום של ξ על $\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_n\}$. נשאר להוכיח

שפונ' בילינ' סימטרי מוגדר חיובית $\Leftrightarrow$ המטריצה שלו בבסיס נתון מוגדרת חיובית.

$$\xi(v,v)=\xi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{x}_i,\sum_{i=1}^{n}\lambda_j\vec{x}_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\xi(\vec{x}_i,\vec{x}_j)\lambda_i\lambda_j$$

$\xi(v,v)>0$ לכל $v\neq0$ $\iff$ $\sum_{i,j=1}^{n}\xi(\vec{x}_i,\vec{x}_j)\lambda_i\lambda_j$ $\Leftrightarrow$ המטריצה $\underbrace{[\xi(\vec{x}_i,\vec{x}_j)]_{i,j=1}^{n}}_{\text{מטריצה של } \xi \text{ בהתאם לבסיס } x_1,\dots,x_n}$ מוגדרת חיובית

לכן $\xi(\vec{x}_i,\vec{x}_j)$ מוגדרת חיובית

$\Leftarrow$ ממשפט סילבסטר $\det B_b(x_1,\dots,x_n)=\det(\xi(\vec{x}_i,\vec{x}_j))>0$ ✓

<u>מקרה ב</u>: $x_1,\dots,x_n$ תלויים לינארית, כלומר קיים וקטור בסדרה שהוא צ"ל של האחרים. בה"כ: $x_n=\alpha_1x_1+\dots+\alpha_{n-1}x_{n-1}$.

$$\det B_0(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} \xi(x_1,x_1) & \cdots & \xi(x_1,x_{n-1}) & \boxed{\xi(x_1,x_n)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi(x_n,x_1) & & \xi(x_n,x_{n-1}) & \boxed{\xi(x_n,x_n)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \xi(x_1,x_1) & \cdots & \xi(x_1,x_{n-1}) & \boxed{\xi(x_1,\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j x_j)} \\ \\ \xi(x_n,x_1) & \cdots & \xi(x_n,x_{n-1}) & \boxed{\xi(x_n,\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j x_j)} \end{vmatrix}$$

לינאריות הדטרמיננטה

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\begin{vmatrix} \xi(x_1,x_1) & \cdots & \xi(x_1,x_{n-1}) & \boxed{\xi(x_1,x_j)} \\ \\ \xi(x_n,x_1) & \cdots & \xi(x_n,x_{n-1}) & \boxed{\xi(x_n,x_j)} \end{vmatrix}=0$$

העמודות תלויות לינארית

העמודה ה-j

■

יהי ξ מוגדר חיובית. $0\le\begin{vmatrix} \xi(x_1,x_1) & \xi(x_1,x_2) \\ \xi(x_2,x_1) & \xi(x_2,x_2) \end{vmatrix}$ $0 \Longleftarrow x_1,x_2$ ת"ל (פרופורציוניים)

$\xi(x_1,x_1)\xi(x_2,x_2)-\xi^2(x_1,x_2)\ge 0$

$\iff \xi(x_1,x_1)\xi(x_2,x_2)\ge\xi^2(x_1,x_2)$ $\quad |\xi(x_1,x_2)|\le\sqrt{\xi(x_1,x_1)\xi(x_2,x_2)}$

ושוויון מתקיים $\iff x_1,x_2$ פרופורציוניים.

⚠ קיבלנו את משפט קושי-שוורץ :)

מרחבי מכפלה פנימית

<u>הגדרה</u>: מרחב מכפלה פנימית זה מ"ו ממשי עם פונק' בילינארי סימטרי מוגדר חיובית.

<u>הגדרה</u>: מרחב אוקלידי זה מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי.

⚠ פונק' בילינארי סימטרי על מרחב מכפלה פנימית- לא נרשום אותו $\xi(x,y)=(x,y)$

<u>דוגמאות</u>:

1. $\mathbb{R}^n$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית: $(x,y)=x_1y_1+\dots+x_ny_n$
2. תהי $B_{n\times n}$ - סימטרית. נגדיר פונק' בילינארי סימטרי על $\mathbb{R}^n$ $\xi(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}x_ix_j$

   ξ מוגדר חיובית $\iff B$ מוגדרת חיובית.
3. $\mathbb{R}^2$. $B=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$. $\xi(x,y)=x_1y_1+x_1y_2+y_2x_1+y_2y_2$

B מוגדרת חיובית כי $\Delta_1=1$, $0<\Delta_2=1$ $\Leftarrow$ ξ מוגדרת חיובית ולכן מכפלה פנימית על $\mathbb{R}_2$.

<u>הגדרה</u>: סדרת וקטורים $x_1,\dots,x_k$ במממ"פ נקראת <u>אורתוגונלית</u> אם $(x_i,x_j)=0$ עבור כל $i\neq j$. ⚠ שני וקטורים נקראים אורתוגונליים אם המכפלה הפנימית שלהם מתאפסת.

סדרה אורתוג' נקראת ~~אורתוגונלית~~ <u>אורתונורמלית</u> אם $(x_i,x_i)=1$ $\forall i$

$|x|=\sqrt{(x,x)}$ - <u>נורמה</u> של x

המשך מינקוביץ 16

<u>אי שוויון המשולש</u> עבור נורמה: $\boxed{|x+y| \le |x|+|y|}$, "=" $\Leftrightarrow$ x,y פרופ׳ עם מקדם אי-שלילי.

<u>משפט</u>: (1) בכל מרחב אוקלידי קיים בסיס אורתונורמלי.

(2) אם $e_1,\dots,e_n \in V$ בסיס אורתונורמלי, אזי לכל $x \in V$: $x=\sum_{i=1}^{n}(e_i,x)e_i$

(3) אם $e_1,\dots,e_n \in V$ בסיס אורתונורמלי, $y=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$, $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ אזי $(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

<u>הוכחה</u>:

(המכפלה הפנימית מוגדרת לפי פונ׳)

(1) קיים בסיס של V שבו $(\cdot,\cdot)$ היא מכפלה הקנונית, ומכאן

שהפונק׳ מוגדר חיובית הדורה הקנונית היא: $x_1^2+\dots+x_n^2 \Rightarrow$ המטריצה של $(\cdot,\cdot)$

היא $I_n=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}_{n\times n}$ $\Leftarrow$ בבסיס הזה $\delta_{i,j}=(e_i,e_j)$ ✓

(2) $e_1,\dots,e_n$ בסיס אורתונורמלי. $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$.

כנדרש! $(x,e_j)=(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,e_j)\underset{\text{לינאריות}}{=}\sum_{i=1}^{n}x_i\underbrace{(e_i,e_j)}_{\delta_{ij}}=x_j$ ✓

(3)

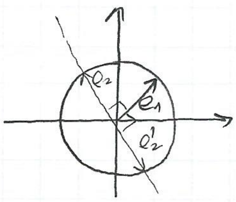
$$(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j)=\sum_{j,i=1}^{n}x_iy_j\overbrace{(e_i,e_j)}^{\delta_{i,j}}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \quad ✓$$

■

הדת דיאומטריה...

$\mathbb{R}^2$, עם מכפלה פנימית סטנדרטית.

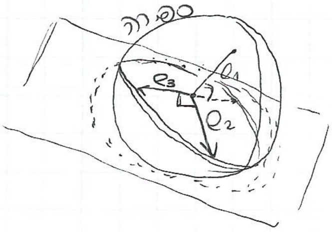
$(e_1,e_2)=0$, $|e_1|=|e_2|=1$.



e_1 - אינסוף אפשרויות

e_2 - 2 אפשרויות

$\mathbb{R}^3$ סטנדרטי.



e_1 - ספירה (פני שטח של כדור) של אפשרויות

e_2 - מעגל של אפשרויות

e_3 - 2 אפשרויות.

<u>טענה</u>: כל סדרה אורתוגונלית של וקטורים $\neq 0$ היא בת״ל.

<u>הוכחה</u>: $x_1,\dots,x_k$ אורתוגונליים. נ.נ. $\lambda_1x_1+\dots+\lambda_kx_k=0$

נכפול סקלרית ב- x_j ($j=1,\dots,k$): $\lambda_j\overbrace{(x_j,x_j)}^{0<}=(\lambda_1x_1+\dots+\lambda_kx_k,x_j)=0$ כי $x_j\neq 0$

לכן $\lambda_j=0$ לכל j ■

אלגוריתם אורתוגונליזציה של גרם-שמידט

$x_1,\dots,x_N \in V$ סדרה בת״ל. אנו רוצים לבנות סדרה אורתונורמלית $e_1,\dots,e_N$

כך ש- $\mathrm{Span}\{x_1,\dots,x_k\}=\mathrm{Span}\{e_1,\dots,e_k\}$ לכל $k=1,\dots,N$.

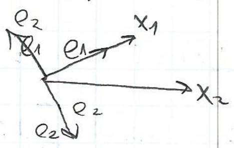
⚠ <u>הערה</u>: שעושה הסדרה החדשה מקיימת $(e_k,x_k)>0$ לכל $k=1,\dots,N$.

אפשר להראות שאם נדרוש גם את $\underbrace{\text{התנאי הזה}}_{(e_k,x_k)>0 \quad \forall 1\le k\le N}$ אז $e_1,\dots,e_N$ סדרה יחידה.

נראה דוגמאות עבור מימדים נמוכים:

* $N=1$. X - נרצה ש- $span\{e_1\}, span\{x_1\}$. אזי $e_1=\frac{x_1}{|x_1|}$

* $N=2$. $\mathbb{R}^2$.



$span\{e_1\}=span\{x_1\}$, $e_1=\frac{x_1}{|x_1|}$

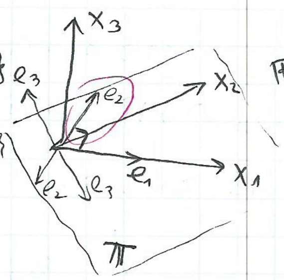
$span\{x_1,x_2\}=span\{e_1,e_2\}=\mathbb{R}^2$

$(e_1,e_2)=0$

$\downarrow$

כעת יש 2 אפשרויות ל-e_2 (מאונכות ל-e_1).
נרצה שגם כאן e_1 חוצה את המישור לשני
החלקים, ונבחר את e_2 שבאותו חצי כמו x_2.

* $N=3$. $\mathbb{R}^3$



$span\{e_1\}=span\{x_1\} \Rightarrow e_1=\frac{x_1}{|x_1|}$

$span\{e_1,e_2\}=span\{x_1,x_2\} \Rightarrow$ יש מישור שבו e_2 יכול להיות.
נדרוש גם $(e_1,e_2)=0$ (e_2 מאונך ל-e_1)

$\downarrow$

נבחר e_2 כמו קודם - באותו צד של x_2

$span\{e_1,e_2,e_3\}=span\{x_1,x_2,x_3\}=\mathbb{R}_3$, $(e_3,e_2)=(e_3,e_1)=1$

כלומר e_3 מאונך למישור π (המישור שנפרש ע"י e_1,e_2).

יש שתי אפשרויות - מעל המישור ומתחתיו. נבחר את הכיוון
שבו x_3.