

דינאמיקה 15

תכונות: $b: V \rightarrow F$ נקטת תכונות ריבועית אם קיים פונ' סקלרית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ כזו ש-
 $\exists$ כך ש- $b(x) = \sum_{j=1}^n \langle x, x_j \rangle x_j$ $x \in V$
 הוכחנו שבתנאי כ, ניתן לבחור $\{x_i\}$ סט בסיס לא $\{x_i\}$ יחידה.

למשק Lagrange על בסיס תכונות ריבועיות:

נתת זהויות חדשות המקדמה ה-3 שבו $b_{ii} = 0$ עם i .

אם $b_{ij} = 0$ עם j, i אז $b = 0$ מן מהצורה.

ע"פ כ' ת"פ n, i כך ש- $b_{ij} \neq 0$. בהכרח $j \neq i$.

נ"ח בפרק $i=1, j=2$ (מחרת נחזיר משתנים), כזו $b_{12} \neq 0$.

$$b(x) = b_{12}x_1x_2 + \sum_{j=3}^n b_{1j}x_1x_j + \sum_{j=3}^n b_{2j}x_2x_j + 2 \sum_{3 \leq i < j \leq n} b_{ij}x_i x_j$$

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 - x'_2 \\ x_2 = x'_1 + x'_2 \\ x_3 = x'_3 \\ \vdots \\ x_n = x'_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = \frac{x_1 - x_2}{2} \\ x'_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ x'_3 = x_3 \\ \vdots \\ x'_n = x_n \end{cases}$$

נעשה החלפת משתנים כך ש-

$$b(x) = 2b_{12}(x'_1 + x'_2)(x'_1 - x'_2) + \sum_{j=3}^n b_{1j}(x'_1 + x'_2)x'_j + \sum_{j=3}^n b_{2j}(x'_1 - x'_2)x'_j + 2 \sum_{3 \leq i < j \leq n} b_{ij}x'_i x'_j$$

$$= \frac{2b_{12}}{4}(x'^2_1 - x'^2_2) + \sum_{j=3}^n b_{1j}(x'_1 + x'_2)x'_j + \sum_{j=3}^n b_{2j}(x'_1 - x'_2)x'_j + 2 \sum_{3 \leq i < j \leq n} b_{ij}x'_i x'_j$$

ומכאן נחזור לבסס כולל, הרי המרחב x_1^2 שונה מאפס

בזמננו

$$b(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \quad (1)$$

$$= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 =$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 = x_1'^2 - 3x_2'^2 + 2x_3'^2 - 2x_2'x_3' =$$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_1' - 2x_2' - x_3' \\ x_2 &= x_2' \\ x_3 &= x_3' \end{aligned}$$

$$= x_1'^2 + 3(x_2' + \frac{x_3'}{3})^2 + \frac{x_3'^2}{9} + 2x_3'^2 = x_1''^2 - 3x_2''^2 + \frac{7}{3}x_3''^2$$

$$\begin{aligned} x_1'' &= x_1' \\ x_2'' &= x_2' - \frac{x_3'}{3} \\ x_3'' &= x_3' \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1' &= x_1'' \\ x_2' &= x_2'' + \frac{x_3''}{3} \\ x_3' &= x_3'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1'' - 2(x_2'' + \frac{x_3''}{3}) - x_3'' = x_1'' - 2x_2'' - \frac{1}{3}x_3'' \\ x_2 &= x_2'' + \frac{x_3''}{3} \\ x_3 &= x_3'' \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix}$$

$$[b]_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$$z(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_1 y_3 + y_1 x_3 + y_2 x_3 + x_2 y_3$$

$$[z]_e = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = [z]_{e'} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = C^t B C$$

$$b(x) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 =$$

2

$$(x'_1 + x'_2)(x'_1 - x'_2) + (x'_1 + x'_2)x_3 + (x'_1 - x'_2)x_3 =$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{החלפת משתנים}$$

$$= (x'_1)^2 - (x'_2)^2 + 2x'_1 x_3 = (x'_1 + x_3)^2 - x'_2{}^2 - x_3^2 = x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$$

$$x_1'' = x'_1 + x_3 = \frac{x_1 + x_3}{2} + x_3$$

$$x_2'' = x'_2 = x_2$$

$$x_3'' = x_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

הצורה הסדורה משמשת יחידה = משוואת עם ארכיון 1

$$\Delta_k := |A_k| \quad (כאן קצת) \quad A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & A_k \end{bmatrix} \quad \text{המשיך תהיה יש א של A הוא}$$

צורה של ב תקנית ריבועית הכוללת חצי חצייה של חצי חצייה.

משפט יתקבל: תהי ב תקנית ריבועית ב א משתנים, מצדה ר. אצי ניתן לזכור

את ב לצורה $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_k y_k^2$ ($\lambda_i \neq 0$) קצרה חלופת משתנים עם

$$\forall i \quad \Delta_i \neq 0 \\ \Delta_0 := 1$$

$$\lambda_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$$

$\Leftrightarrow$ מסיבה משוואת יחידה

$$[e'] = [e]C \quad : [e] \xrightarrow{C} [e'] \quad \text{טובה 1: יהי } [e] \xrightarrow{C} [e']$$

הצורה

$$\forall k \quad \text{span}(e_1, \dots, e_k) = \text{span}(e'_1, \dots, e'_k) \quad \Leftrightarrow \text{משוואת עיונה}$$

$$e'_i = c_{i1}e_1 + \dots + c_{ik}e_k$$

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח C משוואת עיונה.

$$\forall k \quad \text{span}(e_1, \dots, e_k) = \text{span}(e'_1, \dots, e'_k) \quad \checkmark$$

$$\forall k \quad \text{span}(e_1, \dots, e_k) = \text{span}(e'_1, \dots, e'_k) \quad \Rightarrow \text{נניח}$$

$$e'_k = c_{k1}e_1 + c_{k2}e_2 + \dots + c_{kk}e_k \quad \forall i > k \quad c_{ki} = 0 \quad \Leftarrow e'_k \in \text{span}(e_1, \dots, e_k) \Leftarrow$$

המשוואת משוואת עיונה $\checkmark$

טובה 2: תהי C מסתברת מעבר מ- $[e]$ ל- $[e']$ ($[e'] = [e]C$), נניח C משוואת

עיונה. יהיו B, B' מסתברות תקינות קבועים $[e], [e']$ קבועות.

$$B'_k = C_k^t B_k C_k$$

כאן $1 \leq k \leq n$

המשך מניחה 15:

הוכחת טענה 2:

3 שני בסיסי כחסי שני (כי ב תכנית הסודית).

$$B = (\{e_i, e_j\})_{i,j=1}^n$$

$$B_k = (\{e_i, e_j\})_{i,j=1}^k$$

$$B' = (\{e'_i, e'_j\})_{i,j=1}^n$$

$$B'_k = (\{e'_i, e'_j\})_{i,j=1}^k$$

B_k - מרחב של 3 מרחבם של $\text{span}(e_1, \dots, e_k)$ || מרחב 1

B'_k - " $\text{span}(e'_1, \dots, e'_k)$

□. C_k - שניה $(e'_1, \dots, e'_k)$ - $(e_1, \dots, e_k)$ - מרחב מרחב