ליניארית ~~13~~ 14

<u>הגדרה</u>: יהי ξ פונק' בילינ' סימטרי על V. בסיס $e_1,\dots,e_n\in V$ נקרא <u>בסיס מלכסן</u> אם המטריצה ξ בבסיס זה היא אלכסונית. כלומר,

לכל $i\neq j$ $\xi(e_i,e_j)=0$.

<u>משפט</u>: לכל פונק' בילינארי סימטרי קיים בסיס מלכסן.

⚠ התנאי של סימטריות ξ הוא הכרחי לקיום של בסיס מלכסן.

$$\xi(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j \underset{b_{ij}=b_{ji}}{=} \xi(y,x)$$

<u>הוכחה</u>: אם $\xi\equiv 0$ — אין מה להוכיח. נוכיח באינדוקציה על $n=\dim V$. $n=1$ - ברור.

נניח $\underset{\text{קיימים } x,y\in V \text{ כך ש- } \xi(x,y)\neq 0}{0\not\equiv\xi}$. נוכיח שקיים וקטור e_1 כך ש- $\xi(e_1,e_1)\neq 0$.

אם $\xi(x,x)\neq 0 \Leftarrow$ נקח $e_1=x$. אם $\xi(y,y)\neq 0 \Leftarrow$ נקח $e_1=y$.

נניח ש- $\xi(x,x)=\xi(y,y)=0$. נגדיר $e_1=x+y$. וקיבלנו

$$\xi(e_1,e_1)=\xi(x+y,x+y)=\cancel{\xi(x,x)}+\xi(x,y)+\xi(y,x)+\cancel{\xi(y,y)}\underset{\xi\text{ סימטרי}}{=}2\xi(x,y)\neq 0$$

יהי $L=\mathrm{Span}\{e_1\}$. אז $\xi|_L$ לא מנוון, כי המטריצה של $\xi|_L$ ביחס לבסיס e_1 שווה $(\xi(e_1,e_1))\neq 0$. $L\oplus L_{\perp\xi}=V$.

לפי הנ"א, קיים בסיס $e_2,\dots,e_n$ של $L_{\perp\xi}$ כך שהמטריצה של $\xi|_{L_{\perp\xi}}$ היא אלכסונית $\begin{bmatrix}\lambda_2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$

כלומר המטריצה של ξ ביחס ל- $e_1,\dots,e_n$ היא:

$$\left[\begin{array}{c|ccc}\xi(e_1,e_1) & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{array}\right]$$

כי $e_2,\dots,e_n\in L_{\perp\xi}$

∎

<u>מסקנה</u>: תהי $B\in M_{n\times n}(F)$ מטריצה סימטרית. אז קיימת מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה C כך ש- $B=C^tDC$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר פונק' בילינארי סימטרי ξ על $V=F^n$: $\xi(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j$

כאשר $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$.

המטריצה של ξ ביחס לבסיס הסטנדרטי (e) שווה ל- B. לפי המשפט הקודם קיים בסיס e' מלכסן של ξ שבו המטריצה של ξ היא D - אלכסוני.

ותהי C מטריצת מעבר מ- e' ל- e אזי $B=C^tDC$

∎

⚠ **הערות:** (1) אם ξ פונק' בילינ' אנטי-סימטרי אזי קיים בסיס שבו המטריצה של ξ היא:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix} & & 0 & \\ & & \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix} & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix}$$

בפרט, אם ξ גם לא מנוון אז בבסיס הזה המטריצה היא:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix} & \\ & & \ddots \ \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(2) תהי B מטריצה מאת אנטי סימטרית, אזי קיימת מטריצה D כמתוארת לעיל, וכן מטריצה הפיכה C כך ש- $B=C^tDC$. אם B הפיכה אז D תהיה כמו <u>השמאלית</u> למעלה.

הגדרה: יהי V מ"ו מעל F. פונק' $b:V\to F$ נקראת תבנית ריבועית אם קיים פונק' בילי' ξ כך ש- $b(x)=\xi(x,x)$ לכל $x\in V$.

דוגמא: תהי $(b_{ij})\in M_{n\times n}$. נגדיר $b:F^n\to F$ ע"י $b(x)=\sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_ix_j$

ו- $\xi(x,y)=\sum_{i,j} b_{ij}x_iy_j$.

טענה: תהי b תבנית ריבועית. אזי קיים ויחיד פונק' בילי' סימטרי η כך ש- $b(x)=\eta(x,x)\ \forall x\in V$.

הוכחה: קיים ξ כך ש- $b(x)=\xi(x,x)$. נגדיר: $\eta(x,y)=\frac{\xi(x,y)+\xi(y,x)}{2}$

ואכן: $\eta(x,x)=\frac{\xi(x,x)+\xi(x,x)}{2}=b(x)$

נותר להוכיח יחידות: ~~נניח~~ נניח η פונק' בילי' סימטרי כך ש- $b(x)=\eta(x,x)$.

נראה לעובדות שבזה $\eta(x,y)$ מוגדר באופן יחיד ע"י b:

$$\eta(x,y)\underset{\uparrow}{=}\frac{\eta(x+y,x+y)-\eta(x,x)-\eta(y,y)}{2}=\frac{b(x+y)-b(x)-b(y)}{2}$$

$\eta(x+y,x+y)=\eta(x,x)+\eta(x,y)+\eta(y,x)+\eta(y,y)$ ומסימטריות —

שיטת לגרנז' לצמצום תבניות ריבועיות

נתונה תבנית ריבועית על F^n: $b(x)=b(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}b_{ij}x_ix_j$

⚠ $\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{bmatrix}=\overset{\text{הפיכה}}{C}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ שקול למעבר בסיס ← נקרא לזה טרנספורמציה החלפת משתנים.

בשלב הראשון נעשה החלפת משתנים כך ש- $b=b'_{11}x_1'^2+(\text{ללא מכפלות את } x_1')$ $\circledast$

וכך באינדוקציה נגיע לקבל: $b=b'_{11}x_1'^2+b''_{22}x_2''^2+(\text{ללא מכפלות את } x_1',x_2'')=\dots$

$=\tilde b_{11}\tilde x_1^2+\tilde b_{22}\tilde x_2^2+\dots+\tilde b_{nn}\tilde x_n^2$

המשך לינארית 14

נוכיח את ⊛ – השלב הראשון:

נניח $b_{11}\neq 0$.

$$b(x)=\underbrace{b_{11}x_1^2+2\sum_{j=2}^{n}b_{1j}x_1x_j}+\sum_{i=2}^{n}b_{ii}x_i^2+2\sum_{2\le i<j}b_{ij}x_ix_j=$$

$$=b_{11}\Big(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j\Big)^2-\frac{1}{b_{11}}\Big(\sum_{j=2}^{n}b_{1j}x_j\Big)^2+\sum_{i=2}^{n}b_{ii}x_i^2+2\sum_{2\le i<j}b_{ij}x_ix_j=$$

$$=b_{11}\Big(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j\Big)^2-\sum_{i=2}^{n}\frac{b_{1i}^2}{b_{11}}x_i^2-\frac{2}{b_{11}}\sum_{2\le i<j\le n}b_{1i}b_{1j}x_ix_j+\sum_{i=2}^{n}b_{ii}x_i^2+2\sum_{2\le i<j}b_{ij}x_ix_j=$$

$$=b_{11}\Big(\underbrace{x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j}_{x_1'}\Big)^2+\sum_{i=2}^{n}\Big(\underbrace{b_{ii}-\frac{b_{1i}^2}{b_{11}}}_{b_{ii}'}\Big)x_i^2+2\sum_{2\le i<j\le n}\Big(\underbrace{b_{ij}-\frac{b_{1j}b_{1i}}{b_{11}}}_{b_{ij}'}\Big)x_ix_j$$

$x_1'=x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j$ ולכל $1<i$: $x_i'=x_i$.

ומטריצת המעבר היא:

$$\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{b_{12}}{b_{11}}&\cdots&\frac{b_{1n}}{b_{11}}\\ &\ddots&&\\ 0&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

משולשית עליונה עם 1 באלכסון ⇐ הפיכה.

ובמשתנים החדשים אנו מקבלים כי הביטוי למעלה שווה ל-

$$=b_{11}x_1'^2+\underbrace{\sum_{i=2}^{n}b_{ii}'x_i'^2+2\sum_{2\le i<j\le n}b_{ij}'x_i'x_j'}_{\text{אין } x_1'}$$

וזה בדיוק מה שרצינו!

שלב 2: אם $b_{11}=0$ אבל קיים k כך ש- $b_{kk}\neq 0$ נעשה החלפת משתנים:

$x_1\longleftrightarrow x_k$.

שלב 3: נניח $b_{ii}=0$ לכל i. עושים עוד החלפת משתנים ק שבהם

נגיע לשלב 2.