

13 זייגערדיג

פונקציען ביי צייגערדיג

$$T_2(V) = T_2^{sym}(V) \oplus T_2^{skew}(V), \quad \beta: V \times V \rightarrow F, \quad \text{char } F \neq 2$$

אן $e_1, \dots, e_n$ בסיס פון V , מטריצה פון β ביחס צום בסיס e_i האט $B_\beta^{(e)} = (\beta(e_i, e_j))_{i,j=1}^n$. נרצח צו טוען שטענדיקן β ביחס צום בסיס e_i .

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \beta(e_i, e_j) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i (B_\beta^{(e)})_{ij} y_j = \underline{[x_1, \dots, x_n] B_\beta^{(e)} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

טענה: יהיו (e) בסיס פון V . תהי C מטריצת מעבר מ- (e) צו (e') .

$$\boxed{B_\beta^{(e')} = C^t B_\beta^{(e)} C} \quad \text{כאשר } C(e) = (e').$$

$$\text{נכתוב: } \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}, \quad x, y \in V$$

$$\beta(x, y) = [x_1, \dots, x_n] B_\beta^{(e)} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [x'_1, \dots, x'_n] C^t B_\beta^{(e)} C \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} = [x'_1, \dots, x'_n] B_\beta^{(e')} \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}$$

$$[x'_1, \dots, x'_n] A \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} = 0 \quad \text{אם } A = C^t B_\beta^{(e)} C - B_\beta^{(e')} \quad \text{אז } A = 0$$

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} x'_i y'_j = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} = A_{pq} \Rightarrow A = 0 \iff \text{אם } A_{pq} = 0 \text{ אז } p, q$$

הערה: צריך שיהיה פונקציה בינארית β על V שיהיה מטריצה ביחס e_i .

אם β מטריצה ביחס e_i אז $\beta(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

$$\text{למשל: } \beta(e_i, e_j) = \delta_{ij} \Rightarrow B_\beta^{(e)} = I_n \Rightarrow B_\beta^{(e')} = C^t I_n C = C^t C$$

אם β מטריצה ביחס e_i אז $\beta(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

$$\text{הערה: יהי } \beta \text{ פונקציה בינארית על } V \text{ שיהיה מטריצה ביחס } e_i.$$

$$\text{Ker } \beta^e = \{x \in V \mid \beta(x, y) = 0 \forall y \in V\}$$

$$\text{Ker } \beta^r = \{x \in V \mid \beta(y, x) = 0 \forall y \in V\}$$

הערה: $\text{Ker } \beta^e, \text{Ker } \beta^r$ תת מרחב ליניאריים ב- V .

$$\text{אם } \beta \in T_2^{sym}(V) \text{ אז } \text{Ker } \beta^e = \text{Ker } \beta^r$$

$$X = (x_1, x_2) \quad \{ (x, y) = x_1 \cdot y_2 \}, V = F^2 \quad \text{כל הדימויים של } V \text{ על } V$$

$$\text{Ker}_3^L = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 y_2 = 0 \quad \forall (y_1, y_2) \} = \{ (0, x_2) \} \rightarrow \text{Ker}_3^L + \text{Ker}_3^R$$

$$\text{Ker}_3^R = \{ (x_1, x_2) \mid y_1 x_2 = 0 \quad \forall (y_1, y_2) \} = \{ (x_1, 0) \}$$

$$\dim \text{Ker}_3^L = \dim \text{Ker}_3^R = \dim V - \text{rk}(3) \quad \text{משפט:}$$

$$\text{Ker}_3^R = \{ x \in V \mid \{ (y, x) = 0 \quad \forall y \in V \} = \dim \text{Ker}_3^R = n - \text{rk}(3) \quad \text{הכרחי נכח}$$

$$\uparrow \text{נקודת בסיס} \quad \{ x \in V \mid \{ (e_i, x) = 0 \quad \forall i=1, \dots, n \} \quad (e_1, \dots, e_n)$$

$$X = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$\{ (e_i, X) = \{ (e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\{ (e_i, e_j) \}}_{b_{ij}} x_j$$

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_{n1}x_1 + \dots + b_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} n - \text{rk}(b_{ij}) \\ n - \text{rk}(3) \end{matrix} \quad \text{משפט מרחב הסתברות}$$

$$\dim \text{Ker}_3^R = n - \text{rk}(3) \quad \text{כן}$$

$$\text{rk}(b_{ij})^t = \text{rk}(b_{ij}) \quad \dim \text{Ker}_3^L = n - \text{rk}(3) \quad \text{כבר נכח}$$

$$\text{rk}(3) = n \quad \text{הצבה: פונקציה בסיסית} \quad \{ \text{נקודת בסיס מנוון} \text{ רק}$$

$$(\hat{3}^L(x))(y) = \{ (x, y) \quad \text{הצבה: יהי } \hat{3}^L: V \rightarrow V^* \text{ פונקציה בסיסית. מוכח:}$$

$$(\hat{3}^R(x))(y) = \{ (y, x) \quad \text{מוכח: } \hat{3}^R: V \rightarrow V^*$$

$$\text{סוג: } \hat{3}^L, \hat{3}^R - \text{סוג}$$

$$\hat{3}^{(L)}(a_1 x_1 + a_2 x_2) \stackrel{2}{=} a_1 \hat{3}^{(L)}(x_1) + a_2 \hat{3}^{(L)}$$

הכרחי

$$(\hat{3}^{(L)}(a_1 x_1 + a_2 x_2))(y) \stackrel{2}{=} (a_1 \hat{3}^{(L)}(x_1) + a_2 \hat{3}^{(L)}(x_2))(y)$$

$$y \in V \quad \text{df}$$

$$\begin{aligned} & \{ (a_1 x_1 + a_2 x_2, y) \\ & a_1 \{ (x_1, y) + a_2 \{ (x_2, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_1 (\hat{3}^{(L)}(x_1))(y) + a_2 (\hat{3}^{(L)}(x_2))(y) \\ & = a_1 \{ (x_1, y) + a_2 \{ (x_2, y) \end{aligned}$$

$$\hat{3}^R \quad \text{כל } V$$

$$\text{הצבה: } \text{Ker } \hat{3}^R = \text{Ker } \hat{3}^L, \quad \text{Ker } \hat{3}^L = \text{Ker } \hat{3}^R$$

$$\text{Ker } \hat{3}^L = \{ x \in V \mid \hat{3}^L(x) = 0_{V^*} \} \stackrel{1}{=} \{ x \in V \mid (\hat{3}^L(x))(y) = 0 \quad \forall y \in V \} = \hat{3}^L \quad \text{הכרחי - סוג}$$

$$= \{ x \in V \mid \{ (x, y) = 0 \quad \forall y \in V \} = \text{Ker } \hat{3}^L$$

המשך דינאמיות 13

טענה: יהי $\mathcal{Z}$ פונקציה ליניארית. אזי הטענות הבאות שקולות:

(1) $\mathcal{Z}$ איז מניין

(2) $\mathcal{Z}^e$ איזו

(3) $\mathcal{Z}^r$ איזו

(הוכחה)

$\dim \ker \mathcal{Z}^e = \dim \ker \mathcal{Z} = \dim \ker \mathcal{Z}^r = n - \text{rk}(\mathcal{Z}) = 0$ או $\text{rk}(\mathcal{Z}) = n$ (נתון) 1 $\Leftarrow$ 2

$\mathcal{Z}^e \Leftarrow \mathcal{Z} \Leftarrow \mathcal{Z}^r = \{0\} \Leftarrow$

$\dim \ker \mathcal{Z}^e = \dim \ker \mathcal{Z}^e = 0$ או $\mathcal{Z}^e$ איזו (נתון) 2 $\Leftarrow$ 3

$\dim \ker \mathcal{Z}^r = \dim \ker \mathcal{Z}^r \Rightarrow$ או $\mathcal{Z}^r$ איזו

$n - \text{rk} \mathcal{Z} = \dim \ker \mathcal{Z}^r = 0$ או $\mathcal{Z}^r$ איזו 3 $\Leftarrow$ 1

$\square \quad \text{rk} \mathcal{Z} = n \Leftarrow$

⚠️ במשקל הטענות אפשר להבחין. אבל המסקנה היא רק שבמסגרת.

הצגה יהי $\mathcal{Z}$ פונקציה ליניארית. יהי $L \subset V$ ת"מ ליניארי.

מאפיין של L ביחס ל- $\mathcal{Z}$ (משפט אורתוגונליות): $L_{\perp \mathcal{Z}} = \{x \in V \mid \mathcal{Z}(x, \ell) = 0 \forall \ell \in L\}$

⚠️ תהי $L_{\perp \mathcal{Z}}$ ת"מ ליניארית. $V = L \oplus L_{\perp \mathcal{Z}}$.

טענה: $\dim L_{\perp \mathcal{Z}} = n - \dim L$

הוכחה: נתבונן בפונקציה $f: V \rightarrow L^*$ שמוגדרת $(f(x))(\ell) = \mathcal{Z}(x, \ell)$

$\ker f = \{x \in V \mid f(x) = 0\} = \{x \in V \mid (f(x))(\ell) = 0 \forall \ell \in L\} =$

$= \{x \in V \mid \mathcal{Z}(x, \ell) = 0 \forall \ell \in L\} = L_{\perp \mathcal{Z}}$

$\square \quad \dim L_{\perp \mathcal{Z}} = \dim \ker f = \dim V - \dim \text{Im} f = n - \dim L$ (כן)

$\mathcal{Z}: V \times V \rightarrow F$
 $L \subset V$
 $\mathcal{Z}|_L: L \times L \rightarrow F$

טענה: יהי $L \subset V$ ת"מ ליניארי. $\mathcal{Z}$ פונקציה ליניארית. נניח L איז

$V = L \oplus L_{\perp \mathcal{Z}}$ או

הוכחה: נוכיח באופן ישיר כי $L \cap L_{\perp \mathcal{Z}} = \{0\}$. יהי $\ell \in L \cap L_{\perp \mathcal{Z}}$. סומר $x = \ell$:

$0 = \mathcal{Z}(\ell, x) = \mathcal{Z}(\ell, \ell) \Leftrightarrow \ell \in \ker \mathcal{Z}|_L = \ker \mathcal{Z}|_L$ (כי $\ell \in L_{\perp \mathcal{Z}}$)

$\dim(L \oplus L_{\perp \mathcal{Z}}) = \dim L + \dim L_{\perp \mathcal{Z}} = \dim L + n - \dim L = n$ כן $L \oplus L_{\perp \mathcal{Z}} \subseteq V$

$\square \quad L \oplus L_{\perp \mathcal{Z}} = V \Leftarrow \dim(L \oplus L_{\perp \mathcal{Z}}) = n \Leftarrow$