

4. ייחודיות 12

$$P_A(A) = 0$$

הכרחי משפט Cayley-Hamilton:

(ההנחה של F סגור אלגברית)

תהי $\varphi_A: F^n \rightarrow F^n$, $\varphi_A(x) = Ax$

המטריצה שמייצגת את φ_A בהסמך הסטנדרטי שווה ל- A .

F סגור אלגברית $\Leftrightarrow \varphi_A$ קיים הסמך לזוג.

(כמובן, B את המטריצה של φ_A בהסמך לזוג).

$$A = C^{-1}BC, \quad P_A = P_B = P_{\varphi_A}$$

$$P(A) = P(C^{-1}BC) = a_0 I_n + a_1 (C^{-1}BC) + \dots + a_n (C^{-1}B^n C) = C^{-1} (a_0 I_n + a_1 B + \dots + a_n B^n) C = \\ = C^{-1} P(B) C$$

אכן מספיק להוכיח של $P_B(B) = 0$ כאשר B מטריצת לזוג.

$$P_B(\lambda) = \prod_{i=1}^s (\lambda_i - \lambda)^{k_i}$$

$$P_B(B) = \begin{bmatrix} P_B(J_{k_1}(\lambda_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & P_B(J_{k_s}(\lambda_s)) \end{bmatrix}$$

הכיוון קטן - הפלגים יופיעו גם כן באופן בפרט

$$P_B(J_{k_i}(\lambda_i)) = 0$$

מספיק להוכיח של i :

$$\prod_{j=1}^s (\lambda_j - J_{k_i}(\lambda_i))^{k_j} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\prod_{j \neq i} (\lambda_j - J_{k_i}(\lambda_i))^{k_j} \cdot \underbrace{(\lambda_i - J_{k_i}(\lambda_i))^{k_i}}_{=0}$$

$$\lambda_i - J_{k_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}_{k_i \times k_i}$$

חזיתו שמתחת k_i המטריצה הזו שווה 0

מסקנה: תהי A מטריצה מממית. אז $P_A(A) = 0$.

הוכחה: $\mathbb{C} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $A \in \text{Mat}_{k \times n}(\mathbb{C})$

F שדה סגור! $A \in M_{n \times n}(F)$

אם קיים שדה סגור אלגברית Ω שמכיל את F כחלק, $F \subset \Omega$,

$$P_A(A) = 0 \Leftrightarrow A \in M_{n \times n}(\Omega)$$

⚠ ניתן להוכיח (לא פה) של Ω תמיד קיים!

פונקציות ביו-ליניאריות

(הכנס שדה F , $\text{char } F \neq 2$, $F \ni \alpha := 1+1 \neq 0$)

הצגה: יהי V מ"מ על F . פונקציות ביו-ליניאריות $\beta: V \times V \rightarrow F$ למק"מ:

$$\forall x_1, x_2, y \in V \quad \beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad (1)$$

$$\forall x, y \in V, \lambda \in F \quad \beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y) \quad (2)$$

$$\forall x, y_1, y_2 \in V \quad \beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad (3)$$

$$\forall x, y \in V, \lambda \in F \quad \beta(x, \lambda y) = \lambda \beta(x, y) \quad (4)$$

דוגמאות: (1) $V = F$ כל $F \times F \rightarrow F$ $(x, y) \mapsto xy$

(2) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$ על $\mathbb{R}$. מרחב פנימי V הוא פונ' בי-ליניארית.

$$\beta(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i y_j \quad (3) \quad V = F^n, \text{ נקודת } B = (b_{ij})_{n \times n}, B \in M_{n \times n}(F)$$

$$[x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)]$$

שני דוגמאות: $(n=3, n=2) \quad V = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$

(כתובים על ה- x): $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\text{אם מתקיים} \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0 \quad \leftarrow \text{נקרא פונ' פ'}$$

$$\text{שטח} \leftarrow x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0 \quad \text{על ציר}$$

$$\text{שטח} \leftarrow (x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 - R^2 = 0$$

$$\text{אז פסח} \leftarrow \left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^2 - R^2 = 0$$

$$\text{פרבולה} \leftarrow x_1^2 - x_2 = 0$$

$$\leftarrow \text{היפרבולה} \quad x_1 x_2 = 1$$

פונקציה בי-ליניארית $T_2(V)$

טור $T_2(V)$ פשוטות של חבור (כפ) הסדרה.

$$\beta_1, \beta_2 \in T_2(V) \quad \beta_1 + \beta_2(x, y) = \beta_1(x, y) + \beta_2(x, y) \quad \cdot$$

$$(\lambda \beta)(x, y) = \lambda \beta(x, y)$$

ספרי: על הפסגות שהצגנו $T_2(V)$ הוא מ"מ על F .

הצגה: פונ' סוג' β (הוא) סימטרי אם $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ כל $x, y \in V$

אנטי-סימטרי אם $\beta(x, y) = -\beta(y, x)$ כל $x, y \in V$ (שוויון עקור $\emptyset$)

כל פונק' ביו-ליניארית β 'תקיים': $\beta(x, \emptyset) = \beta(\emptyset, y) = \emptyset$ 

בוצעו את הפעולות הבאות:

$$V = F^n, \quad \{ (x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j, \quad \text{מתי } \{ (b_{ij}) \text{ מטריצה } 2 \times n \text{ אם } (b_{ij}) \text{ מטריצה } 2 \times n \}$$

$$\{ (y, x) = \sum_{i,j} b_{ij} y_i x_j = \sum_{i,j} b_{ji} y_j x_i = \sum_{i,j} b_{ji} x_i y_j = \sum_{i,j} b_{ji} x_i y_j = \{ (x, y) \}$$

$\{ (b_{ij}) \}$ מטריצה $\Leftrightarrow$ מטריצה $2 \times n$

$$e_p = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad e_q = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad \text{כאשר } p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\{ (e_p, e_q) = \sum_{i,j} b_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} = b_{pq}$$

$$\{ (e_q, e_p) = \sum_{i,j} b_{ij} \delta_{iq} \delta_{jp} = b_{qp}$$

המטריצה היא מטריצה

$$\{ (b_{ij}) \} \text{ מטריצה } \Leftrightarrow \{ (b_{ji}) \} \text{ מטריצה } \quad \text{כאשר } b_{ji} = -b_{ij} \quad \text{כאשר } b_{ji} = -b_{ij}$$

$$T_2(V) = \{ (b_{ij}) \mid \{ (b_{ij}) \} \text{ מטריצה } 2 \times n \} \quad \text{כאשר } b_{ji} = -b_{ij}$$

$$T_2(V) = T_2^{sym}(V) \oplus T_2^{skew}(V)$$

הוכחה:

$$\{ (b_{ij}) \in T_2^{sym}(V) \cap T_2^{skew}(V) = \{0\} \quad \text{כאשר } b_{ji} = -b_{ij}$$

$$\{ (b_{ij}) \in T_2^{sym}(V) \cap T_2^{skew}(V) = \{0\} \quad \text{כאשר } b_{ji} = -b_{ij}$$

$$T_2^{sym}(V) + T_2^{skew}(V) = T_2(V) \quad \text{כאשר } b_{ji} = -b_{ij}$$

$$\{ (x, y) = \frac{\{ (x, y) + \{ (y, x) \}}{2} + \frac{\{ (x, y) - \{ (y, x) \}}{2}$$

המטריצה $\{ (b_{ij}) \}$ היא מטריצה $2 \times n$ כאשר $b_{ji} = -b_{ij}$

$$\{ (b_{ij}) := (\{ (e_i, e_j) \})_{i,j=1}^n$$