

ויכוחים מעשיים 9

טענה: תהי $\psi: V \rightarrow V$ סף' אולי מטריצה צורון של ψ (אם קיימת)

היא יחידה על כזו תמורה של תו צורון.

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} m_1 & & \\ \hline \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{matrix} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{matrix} \end{array} \right]_{n \times n}$$

היכרחי: $\text{Spec } \psi = \{0\}$ המוצת ע

צ"ל: k $\# \psi_i / m_i = k$ לא תו. סכום צורון.

$$V = \text{Span } E_1 \oplus \dots \oplus \text{Span } E_s$$

$\psi_i = \psi|_{\text{Span } E_i}$ ψ אינור' נמן $\text{Span } E_i$

$$\psi = \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \dots \oplus \psi_s$$

$$\text{Ker}(\psi_1 \oplus \dots \oplus \psi_s) = \text{Ker } \psi_1 \oplus \dots \oplus \text{Ker } \psi_s$$

$$\dim \text{Ker } \psi = \underbrace{\dim \text{Ker } \psi_1}_{1} + \dots + \underbrace{\dim \text{Ker } \psi_s}_{1} = s$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

$$\psi^l = \psi_1^l + \dots + \psi_s^l$$

וכן מכיון ש ψ_i פאעוריאנט:

$$\dim \text{Ker } \psi^l = \dim \text{Ker } \psi_1^l + \dots + \dim \text{Ker } \psi_s^l$$

כעת נכתב עו העטור בחזקה של תו צורון:

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}^l = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} & l \leq m-1 \\ 0 & l \geq m \end{cases}$$

$$\dim \text{Ker } \psi_i^l = \begin{cases} l & l \leq m_i-1 \\ m_i & l \geq m_i \end{cases} = \min\{l, m_i\}$$

$$\dim \text{Ker } \psi^l = \sum_{i=1}^s \min\{l, m_i\}$$

$$\dim \text{Ker } \psi = \sum_{i=1}^s \min\{1, m_i\} = 1 \cdot \# \psi_i / m_i = 1 + 2 \cdot \# \psi_i / m_i \geq 2 \quad \text{סכום ע } l=2$$

$$\dim \text{Ker } \psi = s = \# \psi_i / m_i = 1 + \# \psi_i / m_i \geq 2$$

$$a \dim \text{Ker } \psi - \dim \text{Ker } \psi^2 = \# \psi_i / m_i = 1 \Rightarrow$$

מכ' הפסוקים קצבן 1
לא תו. סכום !!

עבור $k \geq 2$ נוכיח סאינדוקציה:

$$\dim \text{Ker } \psi^k = \sum_{i=1}^s \min\{k, m_i\} = 1 \cdot \# \psi_i / m_i = 1 + 2 \cdot \# \psi_i / m_i = 2 + \dots + (k-1) \cdot \# \psi_i / m_i = k-1 + k \cdot \# \psi_i / m_i \geq k$$

$$\# \psi_i / m_i \geq k \Rightarrow$$

$$\dim \text{Ker } \psi^{k+1} = 1 \cdot \# \psi_i / m_i = 1 + \dots + (k-1) \cdot \# \psi_i / m_i = k-1 + k \cdot \# \psi_i / m_i = k + (k+1) \cdot \# \psi_i / m_i \geq k+1$$

$$\dim \text{Ker } \psi^{k+1} = T + k \cdot \# \psi_i / m_i = k + (k+1) \cdot \# \psi_i / m_i \geq k+1$$

$$\dim \text{Ker } \psi^k = T + k \cdot \# \psi_i / m_i = k + k \cdot \# \psi_i / m_i \geq k+1$$

לא תו. סכום !!

$$(k+1) \dim \text{Ker } \psi^k - k \dim \text{Ker } \psi^{k+1} = T + \underbrace{\psi_i / m_i}_{k} = k \Rightarrow \# \psi_i / m_i = k = \frac{1}{k} ((k+1) \dim \text{Ker } \psi^k - k \dim \text{Ker } \psi^{k+1})$$

מבוא למתמטיקה

נוכח שאם המפה כחצונית יש לה צירוף מתאים כמו של אחריו:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\ell} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \ell \leq m-1 \\ 0 & \ell \geq m \end{cases}$$

אינדוקציה ב- ℓ : $\ell=1$: ברור.

383- נניח $\ell \leq \ell+1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\ell} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\ell+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\ell+1} \quad \checkmark$$

משפט 8.1: סדר הפונקציה עולה. נניח קיים צירוף כזה:

הוא צירוף יש אפס באמצע.

$$M^1 \subsetneq M^2 \subsetneq \dots \subsetneq M^k = M^{k+1} = \dots = \bigvee$$

אם המפה נוספת

(הוכחה): $M^i = \ker \psi^i$ מתקיים:

דוגמה 1: אם $x \in M^i \cap M^{j-1}$ אזי עבור $j < i$

המתקיים $\psi^j(x) = 0$, $\psi^{j-1}(x) \neq 0$.

$$\psi^i(x) \in M^{j-i} \Leftrightarrow \psi^{j-i}(\psi^i(x)) = \psi^j(x) = 0$$

$$\psi^i(x) \notin M^{j-i-1} \Leftrightarrow \psi^{j-i-1}(\psi^i(x)) = \psi^{j-1}(x) \neq 0$$

דוגמה 2: נניח $M^j = M^{j-1} \oplus L$ אזי: ① $\psi(L) \subset M^{j-1}$

$$\psi(L) \cap M^{j-2} = \{0\} \quad ②$$

$$\psi|_L : L \rightarrow \psi(L) \quad ③$$

(הוכחה):

① נניח מניחה 1 עבור $i=1$. $\checkmark$

② נניח $x \in L$, $\psi(x) \in M^{j-2}$. אם $x \neq 0$ אזי מתקיים: $x \neq 0$.

אם $x \notin M^{j-1}$ אזי $\psi(x) \in M^{j-1} \cap M^{j-2} = \{0\}$ $\checkmark$

③ מספיק להוכיח כי $\ker \psi|_L = \{0\}$, נניח $x \in L$ אזי $\psi(x) \in M^{j-2}$ פירושו $\psi(x) = 0$.

④ (שייך ל- M^i עם i) $\psi(x) \in M^{j-2}$ $\checkmark$

דוגמה 3: יהי $M, L \subset M$ תת מרחב צינוריים קטנים. $N \cap L = \{0\}$. אזי קיים תת מרחב צינוריים

$$L \cap L' = \{0\} \quad ① \quad L \oplus L' = M \quad ②$$

הוכחה: $N \oplus L \subset M$. $N \cap L = \{0\}$. $N \cap L' = \{0\}$. $N \cap L = \{0\}$.

הוכחה: $N \cap L' = \{0\}$. נניח $x \in N \cap L'$. אזי $x \in N$ ו- $x \in L'$. $x \in N \cap L' = \{0\}$.

אזי $N \oplus L' = M$ וכן $L \cap L' = \{0\}$. $L' = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$. $N = \text{span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$.