

דינחרות (שיעור 8)

$$\psi: V \rightarrow V$$

נצ"ר

$$\psi_1: V_1 \rightarrow V_1$$

$$\psi_2: V_2 \rightarrow V_2$$

$$V = V_1 \oplus V_2$$

כל

$$\psi(x_1, x_2) := (\psi_1(x_1), \psi_2(x_2))$$

$$(x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$$

$$\psi = \psi_1 \oplus \psi_2$$

נבחר בסיס $e_1, \dots, e_k$ ב- V_1 . מטריצת A_1

נבחר בסיס $e_{k+1}, \dots, e_n$ ב- V_2 . מטריצת A_2

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right]$$

המטריצה של $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2$ בסיסים $e_1, \dots, e_n$ היא:

$$P_{\psi \oplus \psi_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} A - \lambda I & 0 \\ 0 & A - \lambda I \end{vmatrix} = |A - \lambda I| |A - \lambda I| = P_{\psi_1}(\lambda) P_{\psi_2}(\lambda)$$

משפט 1: תהי $\psi: V \rightarrow V$ ט"ו. אזי קיימת הצגה יחידה $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2$ כאשר ψ_1

נפרטנית, ψ_2 הפיכה.
הימחצקה A^k ס.

דוגמה 2: תהי $\psi: V \rightarrow V$ ט"ו. (כאן) $\psi^i = \ker \psi^i$ כל

(1) M^i הוא ψ אינווריאנטי.

$$M^i \subseteq M^{i+1} \quad (2)$$

(3) כל $M^k = M^{k+1} = M^{k+2} = \dots$ (ח"כ זהות ψ^k מתקיימת - משיקת מוגד)

כיוונו:

(1) נניח $x \in M^i$, כוונת $\psi^i(x) = \theta$. $\exists$ $y \in M^i$ $\psi(x) = y$

$$\checkmark \quad \theta = \psi(\theta) = \psi(\psi^i(x)) = \psi^{i+1}(x) = \psi^i(\psi(x)) \stackrel{2}{=} \theta$$

(2) נניח $x \in M^i$ כוונת $\psi^i(x) = \theta$, נפעל את ψ .

$$\text{כאן } x \in \ker \psi^{i+1} = M^{i+1}$$

(3) נניח $M^k = M^{k+1}$. מכאן זהות ψ^k - $M^k = M^{k+1}$. מספק זהות ψ^k $M^{k+2} \subseteq M^{k+1}$

ידי, $x \in M^{k+2}$. $\psi^{k+1}(\psi(x)) = \psi^{k+2}(x) = \theta$. $\psi(x) \in M^{k+1}$ $\psi(x) \in M^k \leftarrow \psi(x) \in M^{k+1}$ $\psi(x) \in M^{k+1}$ $\psi(x) \in M^k$

$$\text{כאן } \psi^k(x) = \psi^k(\psi(x)) = \theta \quad \text{כאן } x \in M^{k+1} \quad \text{כאן } \psi^k(x) = \psi^k(\psi(x)) = \theta$$

דוגמה 3: תהי $\psi: V \rightarrow V$ ט"ו. $N^i = \text{Im } \psi^i$ כל.

(1) N^i - ψ אינווריאנטי

$$N^i \subseteq N^{i+1} \quad (2)$$

(3) כל $M^k = M^{k+1}$ כל

$$M^{k+1} = M^k \Leftrightarrow N^k = N^{k+1} \quad \text{יחידה ט"ו} \quad N^k = N^{k+1} = N^{k+2} = \dots$$

(1) יהי $\psi(x) = \psi^{i+1}(y) = \psi^i(\psi(y))$ $\psi^i: N^i \rightarrow N^{i+1}$ $\text{Im } \psi^i = N^{i+1}$ $x = \psi^i(y)$

(2) יהי $x = \psi^{i+1}(y)$ $\psi^i: N^i \rightarrow N^{i+1}$ $\psi^i(\psi(y)) \in \text{Im } \psi^i = N^{i+1}$ $\checkmark$

(3) מספר המרחב $N^k = N^{k+1} \iff M^k = M^{k+1}$ (המרחב N^k שווה ל-0 או N^k עצמו)

$\dim V - \dim N^k = \dim M^k = \dim M^{k+1} \iff \dim N^k = \dim N^{k+1}$
 $\uparrow$
 "dim V - dim N^{k+1}"
 "מרחב הליניאר"

$V = M^k \oplus N^k$ $\psi: V \rightarrow V$ $M^k = M^{k+1}$ $N^k = N^{k+1}$

תוכנית

$\psi(k+m) = \psi(k) + \psi(m) \rightarrow \psi = \psi_2 \oplus \psi_1$ $\psi_2 = \psi|_{N^k}$ $\psi_1 = \psi|_{M^k}$

$\dim N^k = \dim V - \dim M^k$ $M^k = M^{k+1}$

$\begin{cases} \psi^k(x) = 0 \\ x = \psi^k(y) \end{cases} \rightarrow \psi^k(x) = \psi^{2k}(y)$ $M^k \cap N^k = \{0\}$ $\checkmark$

$y \in M_{2k} \Rightarrow y \in M_k$

$M^k \cap N^k = \{0\}$ $\psi^k(x) = 0 \iff \psi^k(y) = 0$

$\psi|_{M^k}: M^k \rightarrow M^k$ $M^k = M^{k+1}$ $\psi|_{N^k}: N^k \rightarrow N^k$

$\psi|_{N^k}: N^k \rightarrow N^k$

$\psi|_{M^k}: M^k \rightarrow M^k$

$(\psi|_{M^k})^k(x) = 0$ $\psi^k(x) = 0$

$\psi^k: N^k \rightarrow N^k$ $\psi^k: M^k \rightarrow M^k$ $\psi^k: N^k \rightarrow N^k$ $\psi^k: M^k \rightarrow M^k$ $\psi^k: N^k \rightarrow N^k$ $\psi^k: M^k \rightarrow M^k$

$\text{Im } \psi^k|_{N^k} \subset \text{Im } \psi^k|_{M^k}$ $\text{Im } (\psi|_{N^k}) = N^k$

$\psi^k|_{N^k} = \psi^k|_{M^k}$

$\psi = \psi_1 \oplus \psi_2$ $V = X \oplus Y$ $\psi_1: X \rightarrow X$ $\psi_2: Y \rightarrow Y$

$\psi_1: X \rightarrow X$ $\psi_2: Y \rightarrow Y$

$\psi_2: Y \rightarrow Y$

המשך זינאריה 8:

המשך הוכחה:

$$X \subset M^k \iff X \subset \text{Ker } \varphi^p = M^p \subset M^k \quad \varphi_1^p = \emptyset$$

$$Y = \text{Im } \varphi_2^k \subset \text{Im } \varphi^k$$

וכן

$$\dim V = \dim X + \dim Y \leq \dim M^k + \dim N^k = \dim V$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\square} \quad Y = N^k, X = M^k \quad \begin{cases} \dim X = \dim M^k \\ \dim Y = \dim N^k \end{cases}$$

spectrum

$$\varphi: V \rightarrow V \quad \textcircled{\times}$$

$$F \supset \text{spec } \varphi = \{ \lambda \in F \mid \varphi - \lambda \text{Id} \text{ is not invertible} \}$$

$$\text{Ker } \varphi_k \neq \{0\}$$

$$\varphi_\lambda = \varphi - \lambda \text{Id} \quad , \lambda \in \text{spec } \varphi$$

$$\varphi_\lambda = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \quad \text{הפרדה}$$

$$\varphi = (\varphi + \lambda \text{Id}) \oplus (\varphi_2 + \lambda \text{Id})$$

צורת דוידון שני טיפוסים 194:

$$\text{spec } \varphi - \{0\} \quad \varphi: V \rightarrow V \quad \text{הפרדה: אם } \varphi \text{ אינו נרשף אזי}$$

הוכחה:

$$0 \in \text{spec } \varphi \quad \varphi^k = 0 \quad \text{אם } \varphi \text{ אינו הפיך אזי}$$

$$\lambda \in \text{spec } \varphi \quad \text{אם } \lambda \neq 0 \quad \text{אז } \varphi - \lambda \text{Id} \text{ אינו הפיך}$$

$$0 = \varphi^k(v) = \lambda^k v \quad \leftarrow \varphi(v) = \lambda v \quad \text{אם } v \neq 0 \quad \text{אז } \lambda^k = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^k = 0$$

$\boxed{\square}$

$$\lambda = 0$$

$$p_\varphi(\lambda) = (-\lambda)^k$$

$$k = \dim V$$

⚠️ במשך נראה שיש טעות בסימנים