ליניארית 7

רוצים להוכיח:

משפט: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ נוצר סופית. $\varphi: V\to V$ ט"ל. אזי קיים תת מרחב φ אינווריאנטי ממימד 1 או 2.

בשביל זה אנו עושים מירכוב:

V ממשי

$V^{\mathbb{C}}$ מרוכב

$V^{\mathbb{C}} = V\times V = \{(\vec{a},\vec{b}) \mid \vec{a},\vec{b}\in V\}$

$\varphi: V\to V$ ט"ל אנו נעשה $\varphi^{\mathbb{C}}: V^{\mathbb{C}}\to V^{\mathbb{C}}$ ט"ל (מעל $\mathbb{C}$): $\varphi^{\mathbb{C}}(\vec{a},\vec{b}) = (\varphi(\vec{a}),\varphi(\vec{b}))$

(נראה לינאריות של $\varphi^{\mathbb{C}}$: חיבור - לפי הגדרה.

(נראה כפל בסקלר: $\varphi^{\mathbb{C}}(\lambda\xi) = \lambda\varphi^{\mathbb{C}}(\xi)$ לכל $\overset{(a,b)}{\xi}\in V^{\mathbb{C}}$, $u+iv = \lambda\in\mathbb{C}$

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\lambda\xi) = \varphi^{\mathbb{C}}((u+iv)(\vec{a},\vec{b})) = \varphi^{\mathbb{C}}(u\vec{a}-v\vec{b}, v\vec{a}+u\vec{b}) = (\varphi(ua-vb), \varphi(va+ub)) =$$

$$= (u\varphi(a)-v\varphi(b), v\varphi(a)+u\varphi(b)) = (u+iv)(\varphi(a),\varphi(b)) = (u+iv)\varphi^{\mathbb{C}}(\vec{a},\vec{b}) = \lambda\varphi(\xi)\quad\blacksquare$$

תרגיל: $\dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbb{C}} = 2\dim_{\mathbb{R}} V$. אם $e_1,\dots,e_n$ בסיס של V אזי $e_1,\dots,e_n, ie_1,\dots,ie_n$ בסיס של $V^{\mathbb{C}}$ מעל $\mathbb{R}$.

טענה: אם $e_1,\dots,e_n\in V$ בסיס של V (מעל $\mathbb{R}$) אזי $\overset{(e_1,0)}{e_1},\dots,e_n\in V^{\mathbb{C}}$ בסיס של $V^{\mathbb{C}}$ (מעל $\mathbb{C}$)

בפרט $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$

הוכחה:

- פורשת: $\xi\in V^{\mathbb{C}}$, $\xi = \vec{a}+i\vec{b}$, $\vec{a},\vec{b}\in V$.

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j \qquad \vec{b} = \sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j$$

$$\vec{\xi} = \sum_{j=1}^{n}\underbrace{(\alpha_j+i\beta_j)}_{\mathbb{C}}e_j \quad \checkmark$$

- בלתי תלויה לינארית: נניח $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j = \theta_{V^{\mathbb{C}}} = (\theta_V,\theta_V)$

$\lambda_j = u_j + iv_j$

$$\sum_{j=1}^{n}(u_j+iv_j)e_j = \sum_{j=1}^{n}(u_je_j, v_je_j) = \left(\sum_j u_je_j, \sum_j v_je_j\right) = (\theta,\theta)$$

$$\begin{cases}\sum_j u_je_j = \theta\\ \sum_j v_je_j = \theta\end{cases} \xRightarrow{e_1,\dots,e_n \text{ בת"ל (מעל } \mathbb{R})} \forall j: \begin{cases}u_j = 0\\ v_j = 0\end{cases} \Rightarrow \lambda_j = u_j+iv_j = 0 \ \checkmark \quad \blacksquare$$

הוכחת המשפט:

נתבונן ב- ${}^{\mathbb{C}}\varphi$. קיים ע"ע של ${}^{\mathbb{C}}\varphi$ - $\lambda \in \mathbb{C} = u+iv$ ($\mathbb{C}$ סגור אלגברית)

יהי $\xi \in {}^{\mathbb{C}}V$ ו"ע עם ע"ע λ. מתקיים (הגדרת ו"ע): ${}^{\mathbb{C}}\varphi(\xi) = \lambda\xi$

$\xi = (\vec{a}, \vec{b})$

$${}^{\mathbb{C}}\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = (u+iv)(\vec{a}, \vec{b})$$

$$(\varphi(\vec{a}), \varphi(\vec{b})) = (u\vec{a} - v\vec{b}, u\vec{a} + v\vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} \varphi(a) = ua - vb \in span(a,b) \\ \varphi(b) = va + vb \in span(a,b) \end{cases}$$

לכן $span_{\mathbb{R}}\{\vec{a}, \vec{b}\} \subset V$ φ אינווריאנטי. ומכיון ש-

$$0 < \dim_{\mathbb{R}} span\{\vec{a}, \vec{b}\} = 1,2$$

לפחות a או $b \neq 0$ כי ו"ע $\neq 0$

$\blacksquare$

נכתב סדרת פיבונאצ'י: $x_n = a x_{n-1} + b x_{n-2}$ $\quad a,b = 1$

נסמן $y_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$y_n = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y_{n-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 y_{n-2} = \dots = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} y_1$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, נרצה לחשב A^{n-1}

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$A^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b}}{2} \in \mathbb{C}$$

אם $\lambda_+ \neq \lambda_-$ אז A לכסינה (כולל מעל $\mathbb{C}$). V_+ - ו"ע עם ע"ע λ_+

V_- = " " " λ_-

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ V_+ & V_- \\ | & | \end{bmatrix} \qquad A = P \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix} P^{-1} \Rightarrow y_n = P \begin{bmatrix} \lambda_+^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_-^{n-1} \end{bmatrix} P^{-1} y_1$$

אם $\lambda_+ = \lambda_-$ יכול להיות שהיא לכסינה (עם ריבוי גיאומטרי שווה ל-2)

⚠ מה החשוב כאן נעבוד מעל $\mathbb{C}$. כך יש סיכוי גדול יותר שנקבל מטריצה לכסינה בכלל.

דוגמא: פיבונאצ'י:

$x_0 = x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$\lambda_+ \neq \lambda_-$ ולכן המטריצה לכסינה.

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V_+ = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) V_+ \Rightarrow V_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \quad V_- = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow y_n = PDP^{-1} y_1$$

המשך לינארית 7:

צורת ג'ורדן:

הגדרה: תא ג'ורדן

$$J_d(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda&1&0&\cdots&0\\0&\lambda&\ddots&&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&1\\0&0&\cdots&&\lambda\end{bmatrix}_{d\times d}$$

$$J_1=[\lambda]\qquad J_2=\begin{bmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{bmatrix}\qquad J_3=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$$

למטריצה A יש צורת ג'ורדן אם:

* אפשר "לחלק" את האלכסון עם תאי ג'ורדן
* אלכסונית, I, 0 הן בצורת ג'ורדן עם J_1 באלכסון

$$A=\begin{bmatrix}\begin{matrix}\lambda_1&1&0\\0&\ddots&\ddots\\0&0&\lambda_1\end{matrix}&0&&0\\&\ddots&&\\&&\ddots&\\0&&&\begin{matrix}\lambda_s&1&0\\0&\ddots&1\\0&0&\lambda_s\end{matrix}\end{bmatrix}$$

(ערכים לא בהכרח שונים,
תאים לא בהכרח באותו גודל)

הגדרה: אומרים שה"ל φ ניתן להבאה לצורת ג'ורדן אם קיים בסיס שבו המטריצה של φ בצורת ג'ורדן (מטריצת ג'ורדן).

> **משפט סוף וחשוב:** יהי V מ"ו נוצר סופית מעל F. $\varphi: V\to V$ ה"ל.
>
> 1. ל-φ קיימת צורת ג'ורדן $\Longleftrightarrow$ P_φ מתפרק לגורמים ממעלה 1.
> 2. אם צורת ג'ורדן קיימת אז היא יחידה עד כדי תמורה של תאי ג'ורדן.

נניח $\varphi: V\to V$ ה"ל שבבסיס מסוים שווה $J_n(\mu)=\begin{bmatrix}\mu&1&0&\cdots&0\\&\mu&1&&\\&&\ddots&\ddots&1\\0&&&&\mu\end{bmatrix}$

אזי $P_\varphi(\lambda)=(\mu-\lambda)^n$ - ע"ע יחיד μ. ריבוי אלגברי n.

$$\left(\begin{bmatrix}\mu&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\0&&\mu&1\\&&&\mu\end{bmatrix}-\mu I_n\right)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&0&1\\0&&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\vec{0}\Rightarrow M_\mu=\operatorname{Span}\{v_1\}$$

$\dim(M_\mu)=1<n$ לכן φ לא לכסינה!

הוכחת משפט:

1 $(\Leftarrow)$:

$$P_\varphi(\lambda)=\left|\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix}\lambda_1&1&\\&\ddots&\\&&\lambda_1\end{matrix}}_{s_1}&&&\\&\underbrace{\begin{matrix}\lambda_2&1\\&\lambda_2\end{matrix}}_{s_2}&&\\&&\ddots&\\0&&&\underbrace{\begin{matrix}\lambda_m&\cdots\\&\lambda_m\end{matrix}}_{s_m}\end{pmatrix}-\lambda I_n\right|\underset{\uparrow}{=}(\lambda_1-\lambda)^{s_1}(\lambda_2-\lambda)^{s_2}\cdots(\lambda_m-\lambda)^{s_m}$$

מטריצה משולשית עליונה

כנדרש