לינארית II - שיעור 7

⊛ דוגמה נמצא ע"ע וו"ע של הט"ל: $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$: $\varphi(x)=\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

נמצא פולינום אופייני: $P_\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&4\\2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)-2\cdot4=\lambda^2-4\lambda-5=(\lambda+1)(\lambda-5)$

$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=5$ $\Leftarrow$ לכן φ לכסינה (יש שני שורשים שונים)

מטריצה של ט"ל כלפי התלויות בבסיס: $\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}-1&0\\0&5\end{bmatrix}\\ v_1\ \ v_2\end{array}$. נמצא את הו"ע:

$\varphi(v_1)=-v_1$

$\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2&4\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow 2x_1+4x_2=0$. $x_1=-2x_2 \Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ ו"ע עם ע"ע -1.

$\varphi(v_2)=5v_2$

$\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-4&4\\2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow x_1=x_2 \Rightarrow v_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ו"ע עם ע"ע 5.

נמצא מטריצת מעבר בין בסיסים: $P=\begin{bmatrix}-2&1\\1&1\end{bmatrix}$, $A=P\begin{bmatrix}-1&0\\0&5\end{bmatrix}P^{-1}$

⚠ נדבר על כך שמטריצה $A_{n\times n}$ ~~לכסינה~~ ניתן להתאים את המטריצה אלכסונית, (כתב) על $\varphi_A:F^n\to F^n$, $\varphi_A(x)=Ax$ ואז A לכסינה $\Leftrightarrow$ φ_A לכסינה.

הגדרה: תהי $\varphi:V\to V$ ט"ל. יהי $\lambda\in F$ ע"ע של φ. נגדיר $M_\lambda=\{x\in V\mid \varphi(x)=\lambda x\}=\ker(\varphi-\lambda Id)$. כלומר $\{0\}\cup$ ו"ע של φ עם ע"ע λ $=M_\lambda$. $M_\lambda\neq\{0\}$ תת-מרחב לינארי.

הגדרה: תהי $\varphi:V\to V$ ט"ל. תת מרחב לינארי $L\subset V$ נקרא φ-אינווריאנטי אם $\varphi(L)\subset L$.

⚠ $M_\lambda\subset V$ תת מרחב לינארי עצמי של φ עם ע"ע λ. אזי M_λ φ-אינווריאנטי.

($\varphi(x)=\lambda x\in M_\lambda$ כי M_λ תת מרחב לינארי).

טענה: יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_s\in F$ ע"ע שונים של φ. אזי הסכום של $M_{\lambda_1}+\dots+M_{\lambda_s}$ הוא סכום ישר.

הוכחה:

הסכום $N_1+\dots+N_t$ הוא ישר $\Leftrightarrow$ אם $x_1\in N_1,\dots,x_t\in N_t$ כך שֶ- $x_1+\dots+x_t=\theta$ אזי $x_1=\dots=x_t=\theta$ (הוכחנו בלינארית 1).

במקרה שלנו נניח $x_1\in M_{\lambda_1},\dots,x_s\in M_{\lambda_s}$ כך שֶ- $x_1+\dots+x_s=\theta$. נניח בשלילה שלא כל $x_i=\theta$.

נוריד מהסכום את כל אותם x_i כך ש- $x_i=\theta$. לשם פשטות הסימון נניח ש- $x_i\neq\theta$ עבור $x_i\le t$, $x_i=\theta$ עבור $i>t$.

המשך ←

המשך ההוכחה: אז קיבלנו $x_1+\dots+x_t=0$ כאשר x_i זה ו"ע עם ע"ע λ_i.
אז ראינו ש- $x_1,\dots,x_t$ תלויים לינארית, בסתירה למשפט משיעור הקודם
(ו"ע עם ע"ע שונים ~~הם~~ בת"ל) ■

הגדרה: תהי $\varphi: V\to V$ ט"ל. יהי $\lambda\in F$ ע"ע של λ.
① **ריבוי גיאומטרי** של λ זה $\dim M_\lambda$
② **ריבוי אלגברי** של λ זה ריבוי של λ כשורש של P_φ.

טענה: לכל λ_0: $\boxed{\text{ריבוי אלגברי} \ge \text{ריבוי גיאומטרי!}}$

הוכחה: נבחר בסיס $e_1\dots e_k$ של M_{λ_0}. נשלים אותו לבסיס של V ע"י $e_{k+1},\dots,e_n$.
המטריצה של φ לפי הבסיס שבנינו: $i\le k: \varphi(e_i)=\lambda_0 e_i \Leftarrow$

$$A=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|c}\lambda_0 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda_0 & \vdots & B\\ \vdots & \vdots & \lambda_0 & \\ \hline \underbrace{0 \; 0 \; \cdots \; 0}_{k\text{ עמודות}} & & & D\end{array}\right]\end{array}\left.\right\} k \text{ שורות}$$

נחשב את הפולינום האופייני בעזרת המטריצה

$$P_\varphi(\lambda)=\left|\left[\begin{array}{ccc|c}\lambda_0-\lambda & & 0 & B\\ 0 & \ddots & \lambda_0-\lambda & \\ \hline & 0 & & D-\lambda I\end{array}\right]\right|=\left|\begin{matrix}\lambda_0-\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_0-\lambda\end{matrix}\right|\left|D-\lambda I\right|=(\lambda_0-\lambda)^k\cdot\det(D-\lambda I)$$

$\Leftarrow$ ריבוי אלגברי של $\lambda_0 \ge k$. ■

דוגמא: $\varphi: F^2\to F^2$: $\varphi(x)=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ הוכחנו ע"ע יחיד - $\lambda=0$. $M_0=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$

$P_\varphi(\lambda)=\left|\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ 0 & -\lambda\end{bmatrix}\right|=\lambda^2$ $\Leftarrow$ ריבוי גיאומטרי 1. כמו שציפינו.
$\Leftarrow$ ריבוי אלגברי $=2$.

משפט: ט"ל $\varphi: V\to V$ לכסינה $\Leftrightarrow$ P_φ מתפרק למכפלה של גורמים מדרגה ראשונה
וגם ריבוי אלגברי של כל ע"ע שווה לריבוי הגיאומטרי שלו.

הוכחה:
$\boxed{\Leftarrow}$ φ לכסינה:

$$A=\begin{bmatrix}\overbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{matrix}}^{M_1} & & & 0\\ & \begin{matrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{matrix} & & \\ 0 & & \ddots & \overbrace{\begin{matrix}\lambda_s & 0\\ 0 & \lambda_s\end{matrix}}^{M_s}\end{bmatrix}$$

(נסדר אותה כך.) מתקיים: $\lambda_i\ne\lambda_j\ \forall i\ne j$

$$P_\varphi(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{m_1}(\lambda_2-\lambda)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda_s-\lambda)^{m_s}$$

~~מהפירוק~~ ראינו ריבוי אלגברי של $\lambda_i=m_i$. לכל i נסמן M_i - המו"ו שהוא ה-span של ~~ה~~ וקטורי הבסיס
עם ע"ע λ_i. נוכיח: $M_i=M_{\lambda_i}$, ואז $\Leftarrow$ $m_i=\dim M_i=\dim M_{\lambda_i}$ (ריבוי גיאומטרי) כנדרש!
באמת ברור ש- $M_i\subseteq M_{\lambda_i}$. לכן $m_i=\dim M_i\le\dim M_{\lambda_i}$ אבל $\dim M_{\lambda_i}=$ ריבוי גיאו' $\le$ ריבוי אלגברי $=m_i$

$\Leftarrow$ $\dim M_i=\dim M_{\lambda_i}$ $\Leftarrow$ $M_i=M_{\lambda_i}$ ■

המשך הוכחה ↙

המשך לינארית 7 :

המשך הוכחת המשפט:

⇐ יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ כל השורשים השונים של P_φ עם ריבויים $m_1,\dots,m_s$. משפט ש- P_φ מתפרק לחזקות מדרגה 1 מתקיים: $m_1+\dots+m_s=n=\dim V$. נתון $\dim M_{\lambda_i}=m_i$

$M_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus M_{\lambda_s}\subseteq V$ אבל $\dim(M_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus M_{\lambda_s})=m_1+\dots+m_s=n=\dim V$

לכן $M_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus M_{\lambda_s}=V$.

למה: $\varphi:V\to V$ ט"ל. $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ כל הע"ע השונים של φ. φ לכסינה $\Leftrightarrow$ $M_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus M_{\lambda_s}=V$

כדי להוכיח את המשפט נשאר להוכיח את הלמה:

הוכחה: ⇐ נניח $V=M_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus M_{\lambda_s}$. אזי $E^{(1)},\dots,E^{(s)}$ בסיס של V ⇐ $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_s & \\ & & & & \ddots \ \lambda_s\end{bmatrix}$ ✓

⇒ הוכחנו למעשה בכיוון הקודם של המשפט ✓

∎

משפט: יהי V מ"ו ממשי ממימד סופי. תהי $\varphi:V\to V$ ט"ל. אזי קיים תת-מרחב φ-אינווריאנטי ממימד 1 או 2.

נוכיח בהמשך..

מירכוב של מ"ו ממשי:

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ⇐ $V^{\mathbb{C}}$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$. (לכל $\varphi:V\to V$ תתאים $\varphi^{\mathbb{C}}:V^{\mathbb{C}}\to V^{\mathbb{C}}$).

$V^{\mathbb{C}}$: $V^{\mathbb{C}}=V\times V=\{(a,b)\mid a,b\in V\}$ {על $\underbrace{(a,b)}_{\psi}$ נחשוב כ- $a+ib$]

• חיבור - לפי הקורדינטות.

• כפל בסקלרים מ-$\mathbb{C}$: $z\in\mathbb{C}$ - $u+iv\leftrightarrow(u,v)$: $z\cdot\underset{(a,b)}{\psi}=(u+iv)\cdot(\vec{a},\vec{b}):=(u\vec{a}-v\vec{b},u\vec{b}+v\vec{a})\in V^{\mathbb{C}}$

טענה: $V^{\mathbb{C}}$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$ עם הפעולות הנ"ל. (טריוויאלי כי שקול ל-$\mathbb{C}$).

~~[illegible]~~ ⊛ $V=(V,0)\subset V^{\mathbb{C}}$. $i(V,0)=(0,V)$ ⇐ $V^{\mathbb{C}}=V\oplus iV$

אז תהי $\underset{V^{\mathbb{C}}}{\varphi}:\underset{V^{\mathbb{C}}}{V}\to V$. נרצה לבנות $\varphi^{\mathbb{C}}:V^{\mathbb{C}}\to V^{\mathbb{C}}$ כך שלאחר צמצום שלה על V נקבל φ.

נדרוש: ⇐ * $\varphi^{\mathbb{C}}(a,0)=(\varphi(a),0)$

* $\varphi^{\mathbb{C}}(i(a,0))=i\varphi^{\mathbb{C}}(a,0)=i(\varphi(a),0)=(0,\varphi(a))$

הגדרה: $\boxed{\varphi^{\mathbb{C}}(a,b):=(\varphi(a),\varphi(b))}$

טענה: $\varphi^{\mathbb{C}}$ ט"ל של מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

צ"ל: $\varphi^{\mathbb{C}}(z\xi)=z\varphi^{\mathbb{C}}(\xi)$ לכל $\xi\in V^{\mathbb{C}}$, $z\in\mathbb{C}$.