

זינאר ריט II - שייעזר 5

det וזקנות ה' $\frac{3}{2}$

מהי A מטריצה של φ בקסס כזה.

$$(\det \varphi =) \det A$$

$\varphi: V \rightarrow V$
 $\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{bmatrix}$

φ
 $\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{bmatrix}$

י"ה' $\cup$ מ"ו נוצר כופית F_Y .

$A' = CAC^{-1}$. $[e']$ - וקטור יחידה ב $\mathbb{R}^n$ ו A'

$$\det A' = \det C \cdot \det A \cdot \det C' = \det A$$

$$\text{Tr } \mathcal{L} = \text{Tr } A = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}$$

הצגה - הצרכה של ψ : $(Tr \psi)$

$$\text{Tr}(\underbrace{CAC^{-1}}_{A'}) = \text{Tr}(A)$$

(נכ"ח) ψ $\text{Tr}(\psi)$ על תנאי הקבועים: טאורט

$$\begin{cases} B = AC^{-1} \\ A = AC^{-1} \cdot C = BC \end{cases}$$

מילות סוד!
כל חומה מסכית ויטויות, (היי) עקור
$$\text{Tr}(CB) = \text{Tr}(BC)$$

$$\text{Tr}(CB) = \sum_{i=1}^m (CB)_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} B_{ji}$$

$$\text{Tr}(BC) = \sum_{j=1}^n (BC)_{jj} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m B_{ji} C_{ij}$$

פונקציות חופס"ן ש"י ט"ו 8

$$P_\phi(\lambda) = \det(\phi - \lambda \cdot \text{Id}) = \det(A - \lambda I_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma (A - \lambda I_n)_{1\sigma(1)} (A - \lambda I_n)_{2\sigma(2)} \dots (A - \lambda I_n)_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma (A_{1,\sigma(1)} - \lambda \delta_{1,\sigma(1)}) \dots (A_{n,\sigma(n)} - \lambda \delta_{n,\sigma(n)})$$

$$I_{n_{ij}} = \prod_{j=1}^n d_{ij} \text{ to } i \neq j$$

$$\lambda - D \text{ P.I.} - P_v \leftarrow$$

$\deg P_v \leq n$. נניח שמתקיים $\deg P_v \leq n$. נניח שמתקיים $\deg P_v \leq n$.

$$P_\psi(\lambda) = O(\lambda^{n-1}) + \sum_{\vec{a}} \text{sgn} \vec{a} (-\lambda)^n \cdot \delta_{a_1, 2(n)} \cdot \dots \cdot \delta_{a_n, 2(n)} = O(\lambda^{n-1}) + (-\lambda)^n \underbrace{\sum_{\vec{a}} \text{sgn} \vec{a} \delta_{a_1, 2(n)} \cdot \dots \cdot \delta_{a_n, 2(n)}}_1 = 4$$

$$(p_p \text{ על } \mathcal{U} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}) = p_{\psi}(0) = \det(\psi - 0 \cdot Id) = \det \psi$$

$$(-1)^{n-1} T_n \psi \rightarrow \lambda^{n-1} \text{ in } P_3 \cap N \cap \underline{\text{Sitz 27}}$$

הפסוק: $\forall v \in V, \exists \sqrt{v} \in V$ נכון

$v \neq \theta$ ① , n/c λ יבצו ממ

$$\psi(r) = \lambda r \quad (2)$$

. $\lambda \notin F$ אז P_{λ} איז א פאלינום וואס איז נישט צו שפילן אין $F[x]$ און דערפאר איז ער א פאקטור פון $x^2 - 1$.

מרחב וקטורי

סוג $\psi: V \rightarrow V$.

פולינום המינימלי של ψ $\iff \text{Ker}(\psi - \lambda \text{Id}) \neq \{0\} \iff \psi$ בעל ערך עצמי λ הוא שווה ל-0.

הוכחה:

① $\iff$ אם λ הוא ערך עצמי של ψ אזי קיים $v \neq 0$ כך ש- $\psi(v) = \lambda v \iff (\psi - \lambda \text{Id})(v) = 0$. כלומר

$v \in \text{Ker}(\psi - \lambda \text{Id})$. מכאן $\{0\} \neq \text{Ker}(\psi - \lambda \text{Id})$.

$\Rightarrow$ יהי $v \in \text{Ker}(\psi - \lambda \text{Id})$, $v \neq 0$. $(\psi - \lambda \text{Id})(v) = 0 \iff \psi(v) = \lambda v$.

② $\iff \text{Ker}(\psi - \lambda \text{Id}) \neq \{0\} \iff \psi - \lambda \text{Id}$ לא הפיכה $\iff$

$$\iff P_\psi(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = 0$$

מסלול: מספר λ שונים של ψ הוא $\dim V$ (כיוון שהמרחב הפעולה M)

הצבה: $\psi: V \rightarrow V$ נתונה בסיס $\mathcal{B}$ של V קיים בסיס $\mathcal{B}$ של V ו- λ .

אם $v_1, \dots, v_n \in V$ בסיס של V של ψ אז $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ערכי העצמי של ψ הם $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ שונה. $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ (כי $\psi(v_i) = \lambda_i v_i$) $\leftarrow$ זה הדפוס נכון.

הערה: אם λ הוא ערך עצמי של ψ אז λ הוא ערך עצמי של ψ^n .

הוכחה: $\psi^n(v) = \psi(\psi^{n-1}(v)) = \psi(\lambda^{n-1}v) = \lambda^n v$. $\psi^n(v) = \lambda^n v \iff \psi(v) = \lambda v$ (כי $v \neq 0$) $\iff \lambda^n = \lambda$.

דוגמה: $\psi: F^2 \rightarrow F^2$: $\psi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ - כאן $\lambda = 0$ הוא הערך העצמי!

יהי $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ו- $\psi(v) = \lambda v$. אז $\begin{cases} v_2 = \lambda v_1 \\ 0 = \lambda v_2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

מהתנאי $\lambda \neq 0 \iff v_2 = 0 \iff v_1 = 0$ סתירה! $v \neq 0$ ו- $\lambda = 0$.

מקרה ב' $\lambda = 0$: $\begin{cases} v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ לכן כל הווקטורים הצמודים הם מרחב $\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_1 \neq 0$ אז $\lambda = 0$.

$\blacksquare$ אם אין בסיס של ψ (הם כולם ערכי עצמי)

סוג: אם F סגור אז $\psi: V \rightarrow V$ קיים λ .

החלק השני - שיעור 5

בזמנא: $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ סיבוב המישור בזווית α : $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$

אם $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$ אז A איננה נרתיקה ויש.
 $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos \alpha - \lambda & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \cos^2 \alpha - 2\lambda \cos \alpha + \sin^2 \alpha = \lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha + 1$

$$\alpha \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha \geq 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 \lambda_i \geq 0 \Leftrightarrow \text{יש שורש}$$

$$\blacksquare \alpha \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \text{אין שורש}$$

משפט: יהי $\varphi: V \rightarrow V$ ש $\dim V = n$. אם P_φ קיימים n שורשים
 שונים, אזי φ סבסטר.

הוכחה: אם $v_1, \dots, v_k \in V$ ויש λ שם k שורשים שונים אז הם כתר'ם.
 (הם הסתנה) $k=1$ - ברור.
 הוכחה: אינך $k-1$.

$$\lambda^{k-1} v_1 + \dots + \lambda v_{k-1} + \lambda^k v_k = \theta \quad \text{נניח}$$

$$\lambda^{k-1} v_1 + \dots + \lambda v_{k-1} + \lambda^k v_k = \theta$$

$$\lambda_1(\lambda_1 - \lambda) v_1 + \dots + \lambda_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda) v_{k-1} = \theta$$

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{k-1} = \theta \Leftrightarrow \underbrace{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda)}_{\neq \theta} = \dots = \underbrace{\lambda_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda)}_{\neq \theta} = \theta$$

$$\blacksquare \text{כן (צ'י ב-} \theta \text{) ונרש } \lambda_k = \theta$$

הוכחת המשפט: יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ שורשים ש P_φ ויהיו $v_1, \dots, v_n \in V$ ויש

שם k כתר'ם. לפי הסתנה הם כתר'ם $v_1, \dots, v_k$ זה בסיס, וכן φ סבסטר

כי בסיס זה הנה המטריצה ש φ שורה $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$