

דינאמיקה

4

הצגה: (הצגה: פונקציה של הפירוק) $f \in F[x]$ נקרא אי-פירוק אם הוא אי-פירוק. $f = g \cdot h$, כאשר g, h אי-פירוקים (אם קיימים).

משפט: יהי $f \in F[x]$ אי-פירוק אזי קיימת הצגה $f = p_1 \dots p_s$, $p_1, \dots, p_s$ אי-פירוקים. ההצגה הזו היא יחידה עד כדי תמורה הזרותים ופשוט של הזרותים. ההפך.

$$\tau: F[x] \rightarrow F^F, \quad \tau(f)(a) = \sum f_i a^i = \tau(\sum f_i x^i)(a) = \sum f_i a^i$$

הצגה: $a \in F$ נקרא שורש של פונקציה $f \in F[x]$ אם $(\sum f_i a^i) f(a) = 0$

אם Δ $\deg f = 1$ אזי f אי-פירוק $\Leftrightarrow f = g \cdot h$ $\deg g, \deg h = 1$ (אם Δ $\deg f = 1$ אזי f אי-פירוק)

אם Δ $\deg f = 2$ והוא פירוק $f = g \cdot h$, $\deg g = \deg h = 1$. נקרא f Δ -פירוק. $\Leftrightarrow f$ אי-פירוק.

עוד נשים לב שיש פונקציה $\deg f \leq 2$ יש שורש או לא פירוק. לפי Δ $\deg f = 2$ אז f אי-פירוק $\Leftrightarrow f$ אי-פירוק.

$\deg f = 3$ - נניח שיש שורש a אזי $f = (x-a)g$, $\deg g = 2$ (עוד נניח שיש שורש).

אם $f = g \cdot h$, $\deg g = 1, \deg h = 2$ אז f אי-פירוק. אם $f = g \cdot h$, $\deg g = 2, \deg h = 1$ אז f אי-פירוק. אם $f = g \cdot h$, $\deg g = 3, \deg h = 1$ אז f אי-פירוק. אם f אי-פירוק $\Leftrightarrow f$ אי-פירוק.

הצגה: אם $\deg f \geq 4$ אז פירוק של f אי-פירוק של שורש.

$$F = \mathbb{R}, \quad f(x) = (x^2 + 1)^2$$

משפט: יהי $f \in F[x]$, $a \in F$ אזי קיימים ויחיד $g \in F[x]$ ו- $r \in F$ כך ש- $f = g(x-a) + r$.

הוכחה: נחלק f ב- $(x-a)$ עם שארית: $f = (x-a)g + r$

$$f(a) = g(a)(a-a) + r = r \quad \deg r < \deg(x-a) = 1 \Leftrightarrow \deg r = 0 \Leftrightarrow r \text{ פונקציה קבועה.}$$

כאשר הוכחנו קיום של הצגה, נבדוק 'יחידות' של הצגה נובעת מחיבור חזקה עם שארית.

מסקנה: (1) $a \in F$ שורש של $f \in F[x] \Leftrightarrow f$ מתחלק ב- $(x-a)$

(2) אם $a \in F$ שורש של f , $\deg f \geq 2$ אזי f פירוק.

הוכחה $\leftarrow$

הנחת: (1) $\Rightarrow$ נ"ח $f = g \cdot (x-a)$ כי $f(a) = g(a)(a-a) = 0$ שיהיה $a \leftarrow f(a) = g(a)(a-a) = 0$
 $\Leftarrow$ אם המעלה הקדמית $\leftarrow f = g(x-a) + \underbrace{f(a)}_0 = g(x-a)$ $\Leftarrow (x-a) \mid f$
 (2) $\deg f = 2$, $f(a) = 0$

$$f = g(x-a) + \underbrace{f(a)}_0 = g(x-a) \quad \wedge \quad \deg g = \deg f - 1 \geq 1$$

$\Downarrow$

g היא הפולינום f חלק

⚠️ כשנינו $k[x]$ $\deg f = 1$ - נוח לרשום $k[x]$ $\deg f = 1$ $\Leftarrow$ $f = c(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_s)^{k_s} \cdot g(x)$ $\deg f \geq 1$, $f \in k[x]$

$$f = c(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_s)^{k_s} \cdot g(x)$$

כאשר $a_i + a_j$ עבור $i \neq j$, $k_i \in \mathbb{N}$, g פולינום מתוקן או פרימי

מדרגה ≥ 2 . c זה המקדם המוביל של f .

$(a_s, k_s) \dots (a_1, k_1)$ מוצגים עד כדי תמורה, g מוצגים באופן יחיד $\Leftarrow$ תמורה.

הצגה: k נקרא רצף של הסתים a_i של f .

טענה: ריבוי של שורש a של f זאת החזקה המקסימלית של $(x-a)$ שחלקה את f .

טענה: מספר שורשים של f כולו $\geq \deg f$.

$$\deg f = k_1 + \dots + k_s + \sum \deg g_i \geq k_1 + \dots + k_s$$

הוכחה: $\Leftarrow$

הצגה: שדה F נקרא מורמוגוריות אם כל פולינום לא קבוע $f \in F[x]$ קיים שורש $\alpha \in F$.

דוגמאות: (1) $\mathbb{R}[x]$ - לא, $x^2 + 1$ אין שורשים $\mathbb{R}$ (3) שדה סופי - לא סוראליסטית
 (2) $\mathbb{C}[x]$ - כן

משפט: (1) סוראליסטית (!!!)

משפט: אם F סוראליסטית $\Leftrightarrow \deg f = 1 \Leftrightarrow f$ חלק $(x-a)$ $a \in F$ שיהיה f $\Leftarrow$ ניוטון $\Rightarrow$ ידוע.

$$f = g(x-a) \quad \deg g \leq \deg f \quad \Leftarrow \quad f \text{ חלק } (x-a)$$

משפט: 'הי' F סוראליסטית, אז כל פולינום לא קבוע מספר שורשים חזרי
 ריבויים שמה אפשרות הפולינום. (ה- $\mathbb{C}$ לאן פולינום אי פריק' נמצאה 2...)

דחשן יינחריה 4:

⚠ (הערות: אם f סדור אסדרות k אז $f = c \cdot (x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_s)^{k_s}$, $a_i \neq a_j$, סדר $k_i \in \mathbb{N}$, $i \neq j$.

⊗ משפט 1: יהי $f \in \mathbb{R}[x]$. אם f פריק $\Leftrightarrow \deg f \geq 1$ וקיים $g \in \mathbb{R}[x]$ ו- $f = g \cdot h$ שיהיה $\deg g \geq 1$.

משפט 2: יהי $f \in \mathbb{R}[x]$. אם $\alpha \in \mathbb{C}$ שיהיה f פריק אז שיהיה $f = g \cdot h$.

הוכחה: $f = \sum f_i x^i$, $f_i \in \mathbb{R}$. נחלק "ס": $\sum f_i \alpha^i = 0$

$$\sum f_i \alpha^i = 0 \Rightarrow \sum f_i \alpha^i = \overline{\sum f_i \alpha^i} = \sum \overline{f_i \alpha^i} = \sum \overline{f_i} \overline{\alpha^i} = \sum \overline{f_i} \alpha^i = 0$$

$\Downarrow$
 $\sum f_i \alpha^i = 0 \Rightarrow \sum \overline{f_i} \alpha^i = 0$
 $\Downarrow$
 $\sum f_i \alpha^i = \sum \overline{f_i} \alpha^i = \sum f_i \alpha^i = 0$ $\blacksquare$

משפט 3: יהיו $f, g \in \mathbb{R}[x]$, $g \neq 0$. נניח $f = g \cdot h$ כאשר $h \in \mathbb{C}[x]$. אז $h \in \mathbb{R}[x]$.

הוכחה: נחלק f ב- g עם שארית r ב- $\mathbb{R}[x]$. $f = g \cdot \tilde{h} + r$, $\tilde{h}, r \in \mathbb{R}[x]$, $\deg r < \deg g$.

$\Downarrow$
 אפשר להחליף את r ב- 0 כי $r = 0$ או $r \neq 0$.
 אם $r \neq 0$ אז $f = g \cdot \tilde{h} + r$ ו- $f = g \cdot h$ אז $g \cdot h = g \cdot \tilde{h} + r$ אז $g(h - \tilde{h}) = r$.
 אבל $\deg r < \deg g$ ו- $\deg g(h - \tilde{h}) \geq \deg g$ (כי $h - \tilde{h} \neq 0$).
 זה סתירה. אז $r = 0$. אז $f = g \cdot h$ ו- $h \in \mathbb{R}[x]$.

אם כן - $\mathbb{C}[x]$ יש חזקות של חזקות עם שארית, כלומר $h = \tilde{h} + r$, $0 = r$.

$\Leftarrow h \in \mathbb{R}[x]$ $\blacksquare$

⊗ (הוכחת המשפט 3)

⚡ ידוע $\Rightarrow$ אם f פריק, $\deg f \geq 1$, אז יהיה $f = g \cdot h$ שיהיה $\deg g \geq 1$.

נניח $\alpha \in \mathbb{C}$ שיהיה f פריק. $\alpha \neq \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$.

$f = (x - \alpha)g$, $g \in \mathbb{C}[x]$

נניח $\alpha \in \mathbb{C}$ שיהיה f פריק. אז $f(\alpha) = 0$.

$g = (x - \alpha)h$, $h \in \mathbb{C}[x]$ וכן $g \in \mathbb{C}[x]$.

$f = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})h = (x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}) \cdot h$ $\Leftarrow$

$\underbrace{\alpha + \bar{\alpha}}_{2\operatorname{Re} \alpha} \quad \underbrace{\alpha\bar{\alpha}}_{|\alpha|^2}$
 $\in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$

כעת נניח $h \in \mathbb{R}[x]$. אם $\deg h \geq 1$ אז f פריק ב- $\mathbb{R}[x]$, אבל זה לא נכון.

$\blacksquare$ $\deg f = 2$ וכן h פריק קטן.