אלגברה II שיעור 1

פולינומים פורמליים

הגדרה: יהי F שדה. סדרה אינסופית $(f_0, f_1, f_2, \dots)$ כאשר $f_i \in F$ וגם מתאפסת רק מאיברים מסוימים: $B = \{\text{פונקציות}\}$

דוגמא: $F = \mathbb{Z}_2$, $f(x) = x^2 + x$ מתקיים $f(0) = 0$, $f(1) = 0$

אבל בלבד אין פונקציות האפס, הרי מוצא ש- $(0,1,1,0,\dots)$

הגדרה: יש התאמה $F \xrightarrow{\varphi} B$ שמוגדרת בצורה הטבעית:

$$\varphi((f_0, f_1, \dots))(a) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i a^i \qquad a \in F$$

הגדרה: סכום של פונקציות פורמליות: $g = (g_0, g_1, \dots)$, $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$

$$f + g := (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots) \in B$$

הגדרה: כפל של פולינום פורמלי בסקלר: $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, $\alpha \in F$

$$\alpha f := (\alpha f_0, \alpha f_1, \alpha f_2, \dots) \in B$$

שימו לב: עם הפעולות האלה, B מרחב וקטורי מעל F.

הערה: • הוקטור האפס הוא $(0,0,0,\dots)$

• הוקטור הנגדי של $(f_0, f_1, f_2, \dots)$ הוא $(-f_0, -f_1, -f_2, \dots)$

תרגיל: B הוא גם שדה סופית.

הגדרה: כפל של פונקציות פורמליות: $g = (g_0, g_1, g_2, \dots)$, $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$

$$f \cdot g = (f_0 g_0, f_0 g_1 + f_1 g_0, f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0, \dots) \in B \Rightarrow (f \cdot g)_k = \sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i}$$

[הסבר: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i}\right) X^k = \sum_{i,j} (f_i g_j) X^{i+j} = \sum_i \sum_j f_i X^i \cdot g_j X^j = \left(\sum_i f_i X^i\right)\left(\sum_j g_j X^j\right)$]

נבדוק כי כפל פונקציות פורמלי באמת הפעולה מתאפסת תמיד:

$$f_i \cdot g_{k-i} = 0 \quad \forall i > k-i \quad \checkmark \quad \text{כי או } A \ni i > k-i \text{ או } B \ni k-i < i$$

$$\begin{cases} \exists A \ \forall i > A : f_i = 0 \\ \exists B \ \forall j > B : g_j = 0 \end{cases}$$

* $\mathbb{R}$ אלגברה מעל $\mathbb{R}$
* B אלגברה מעל F.
* $M_n(F)$ - אלגברה מעל F.

דוגמאות: * שבה F הינו אלגברה מעל עצמו.

* $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x = (b \cdot x) \cdot a$ מתקיים $\forall a,b \in A$, $\exists x \in F$.

כ"ש: $x \in \{0, 1\}$ שמקיימות: ① A עם הפעולות שם תקף וכפי שמקורם הינו מעל F.

② $\forall x \in F : \exists \varphi_x : A \to A$ שמקיים $\varphi_x(a) = x \cdot a$

הוכחה: $(1, 0, 0, 0, \ldots) = 1$, $f = (f_0, f_1, \ldots)$,

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} 1_i \cdot f_{k-i} = (1 \cdot f)_k \quad \Rightarrow \quad f = 1 \cdot f$$

■

משפט: B - חוג עם יחידה: $(1, 0, 0, 0, \ldots) \in B$

הוכחה: $a = a \cdot 1 = 1 \cdot a$ מתקיים $\forall a \in A$.

משפט: חוג נקרא **חוג אבל** אם הוא חוג חילופי, כפל יחידה 1:

$$(f \cdot (gh))_k = \sum_{d+p=k} f_d \cdot (gh)_p = \sum_{d+p=k} f_d \sum_{l+m=p} g_l h_m = \sum_{d+l+m=k} f_d g_l h_m$$

$$((fg) \cdot h)_k = \sum_{i+j=k} (fg)_i h_j = \sum_{i+j=k} \left(\sum_{l+m=i} f_l g_m \right) h_j = \sum_{l+m+j=k} f_l g_m h_j$$

$\checkmark$

הוכחה: * אלגברות שם כפל: $(fg)h = f(gh)$,

משפט: B חוג הומומורפי (כזכור הכפל הינו הומומורפי).

* $\mathbb{Z}_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$
* $M_n(f)$ - מטריצות מעל שדה שהוא (כפי שנראה הומומורפי?)
* כל שדה הינו חוג. הפרכים $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ רק כאשר

דוגמאות: * $\mathbb{Z}$

⑨ כפל מתפלג מימין ומשמאל $a(b+c) = ab + ac \;\wedge\; (b+c)a = ba + ca$ $\forall a,b,c \in A$ מתקיים

⑤ אסוציאטיביות כפל $(ab)c = a(bc)$ מתקיים $\forall a,b,c \in A$

④ איבר נגדי $\forall a \in A$ קיים $\exists b \in B$ כך ש- $a + b = 0$

③ איבר ניטרלי $\exists 0 \in A$ כך ש- $a + 0 = a$ מתקיים $\forall a \in A$

② אסוציאטיביות $(a+b)+c = a+(b+c)$ מתקיים $\forall a,b,c \in A$

① קומוטטיביות $a+b = b+a$ מתקיים $\forall a,b \in A$

שמקיימות: $\varphi : A \times A \to A$ פונקציות - $\varphi(a,b) := a+b$ חיבור, $\psi : A \times A \to A$ כפל, $\psi(a,b) := a \cdot b$

הגדרה: **חוג** קבוצה A יחד עם שתי פעולות בינאריות

נגדיר הטלה $F \to B$ ע"י: לכל $a \in F$: $a \mapsto (a,0,0,\ldots)$

מתקיים: $(a,0,0,\ldots)\cdot(b,0,0,\ldots) = (ab,0,0,\ldots)$
$(a,0,0,\ldots)+(b,0,0,\ldots) = (a+b,0,0,\ldots)$

לכן נכון $F \subset B$.

$$f = (f_0,f_1,f_2,\ldots) = f_0(1,0,0,\ldots)+f_1(0,1,0,\ldots)+f_2(0,0,1,0,\ldots)+\ldots$$
$$= f_0 + f_1X + f_2X^2 + f_3X^3 + \ldots$$

$\boxed{B = F[X]}$ את הזכרה של הפונקציות הפולינומיות מעל שדה F נכון:

$\Psi : F[X] \to F^F$, $(\Psi(\sum f_i X^i))(a) = \sum f_i a^i$ ההטלה

⚠ היא הומומורפיזם חח"ע!

נגדיר בפעולות של חיבור וכפל: $f+g$, $f\cdot g$

$$(\lambda\cdot\mu)(x) = \lambda(x)\cdot\mu(x)$$
$$(\lambda+\mu)(x) = \lambda(x)+\mu(x)$$
$$(\lambda\cdot\mu)(x) = \lambda(x)\cdot\mu(x)$$

לפ הפעולות הללו F^F היא אלגברה מעל F.

הגדרה: יהיו A אלגברה מעל F. פונק' $\Psi : A \to B$ נקראת **הומומורפיזם של אלגברות** אם היא מקיימת:

1. Ψ הומומורפיזם חח"ע.
2. $\Psi(a_1)\Psi(a_2) = \Psi(a_1a_2)$ לכל $a_1,a_2 \in A$.

דוגמה: $\Psi : F[X] \to F^F$ היא הדוגמא של אלגברות. יתרה מזאת, $\Psi(1) = 1$

הוכחה: נסמן רק את תכונה ②:

$$(\Psi(\sum_i f_iX^i)\Psi(\sum_j g_jX^j))(a) \overset{\text{הגדרת } \Psi}{=} \Psi(\sum_i f_iX^i)(a)\cdot\Psi(\sum_j g_jX^j)(a) \overset{\text{הגדרת } \Psi}{=}$$

$$\Psi(\sum_k(\sum_{i+j=k} f_ig_j)X^k)(a) \overset{\text{הגדרת } \Psi}{=} \sum_k(\sum_{i+j=k} f_ig_j)a^k = \sum_i\sum_j f_ig_ja^{i+j} = (\sum_i f_ia^i)(\sum_j g_ja^j)$$

אלגברה שאנו, ∎ אלגברה - $(\sum f_ia^i)(\sum g_ja^j)$ ואנו,

הגדרה: יהי $f = \sum f_iX^i \in F[X]$. סקלר $a \in F$ נקרא **שורש** של הפולינום f אם $(\Psi(f))(a) = \sum f_ia^i = 0$.