

כבוא יחסיתבות-חשפטי'ם ודגדרות

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{k-1} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

סאינדוקציה: נסחת הנדסה והפרדה:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

הסתבות מותנה:

כל העצות/חשפטי'ם: $A_1, \dots, A_n$ מאונות ק ש $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

נכחת הסתבות שמעפי $A_1, \dots, A_n$ חוקה שחזרה ופס: $P(A_i) > 0$ כזוי:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A|A_1) + \dots + P(A_n)P(A|A_n)$$

כזבה-אי חזות סין א מאונות: $A_1, \dots, A_n$ כ"א $P(A_i) > 0$ ו $P(\cap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$

$$\forall C \in \mathcal{P}(\{A_i\}_{i=1}^n) : P((\cap_{A \in C} A) \cap (\cap_{A \in C^c} A^c)) = \prod_{A \in C} P(A) \cdot \prod_{A \in C^c} P(A)$$

השקנה: $A_1, \dots, A_n$ כ"א $\Leftrightarrow$ פס $k \leq n$ ופס $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ מתק"פ

$$\boxed{\text{ס תתק"פ כ"א}} \Leftrightarrow P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

⚠ אי חזות $\nRightarrow$ אי חזות סתורה מותנה.

סלנה-גרש-מקרי"ם: אזי פס א חזות, כ קשת מופעה בסיכוי ק (האופן כ"א).

כמני: $A = \text{ק"מתנת' מבוזבת}$ אזי פס $0 < \epsilon$:

$$P(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{אזי } P = (1+\epsilon) \frac{\log k}{k} \quad \text{פס 1}$$

$$P(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{אזי } P = (1-\epsilon) \frac{\log k}{k} \quad \text{פס 2}$$

התפזרת משותפת = (התפזרות מ"א עזאונות מרחב, שזית = פס ב משתנה זכר).

$$\text{מ"א כ"א} = P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad X, Y \text{ כ"א}$$

כינוי: שטח זפסלמני (הי (P_n) כזרת מכפלים בין כז 1- כ"א פס $k \cdot P_n \leftarrow \lambda$ כ"א פס

$$P(X_n=k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad \{k \in \mathbb{N}, k \neq 0, 1, \dots\} \text{ מתק"פ}$$

סכום פסלמני = פסלמני: X_1, X_2 מ"א כ"א פס $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1), X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad \text{כזוי, } Y = X_1 + X_2$$

חוק המכפלים והקטני"ם: חשפת זכרת פסלמני: פס א (תניס א מ"א כ"א) $\Leftrightarrow$ $X_n \sim \text{Ber}(P_{n,k})$ $\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda$ פס 2

$$\sum_{k=1}^n P_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{פס 3} \quad P(X_n=m) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{m!}$$

$$X_n = \sum_{k=1}^n X_{n,k} \quad \text{פס 3}$$

מנח: יפה $0 \leq p \leq 1$, $X \sim \text{Ber}(p), Y \sim \text{Poisson}(p)$ כ"א ק"פ זמנז (מרחב הסתבות (p))

$$P(X+Y) \leq p^2 \quad \text{פס 3}$$

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(X=x)$$

הזכרת תוחלת:

ציון: עבור מ"מ X הוא כמ"מ x ק"י $P(X \geq x) \geq 1/2$, $P(X \leq x) \geq 1/2$

שכיח: ש"י X הוא כמ"מ x ק"י $P(X=x)$ מקסימלית.

הזכרת שכיח: $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in D$: $\omega \in \Omega$ אם $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $X_1, \dots, X_n$ מ"מ עם אותו מרחב,

$$Y = f(X_1, \dots, X_n) \Rightarrow E[Y] = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) \cdot P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)$$

תורת שמוכר: אם X, Y ק"י בעלי תוחלת סופית אז $E[XY] = E[X]E[Y]$

$$E[X^2] - E[X]^2 = \text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

$$V(X) < \infty \iff E[X] < \infty \iff E[X^2] < \infty$$

$$E[X^2] < \infty \iff E[(X-a)^2] < \infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad V(aX) = a^2 V(X) \quad \text{כאשר} \quad V(X) \geq 0$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad V(X+a) = V(X) \quad \text{כאשר} \quad P(X=E[X])=1 \iff V(X)=0$$

דוגמה: $E[Z] \leq E[W] \iff P(Z \leq W) = 1$: Z, W עם אותו מרחב הסתברות

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$E[XY], E[(X+Y)^2], E[(X-Y)^2] < \infty \iff E[X^2], E[Y^2] < \infty$$

(2) השונות והמשתנה מוגדרות היטב וסופית

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

מקרה
מיוחד
שונה

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}}$$

משפט: אם X, Y בעלי שונות, עם אותו מרחב הסתברות לא קדום: $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$

$$P(Y=aX+b)=1 \iff \rho(X, Y)=1 \quad \text{כאשר} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$P(Y=aX+b)=1 \iff \rho(X, Y)=-1 \quad \text{כאשר} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$E[X|B] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega|B); \quad V(X|B) = E[X^2|B] - E[X|B]^2$$

$$E[X|A] = \frac{E[X \cdot 1_A]}{P(A)}$$

$$|E[X|A]| \leq E|X||A|$$

המושג חשפטים והגדרות כלליהם

נכחת תוחלת (השערה): X, Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות, X עם תוחלת סופית.

אז המ"מ $E[X|Y]$ עם תוחלת סופית ותק"פ: $E[X] = E[E[X|Y]]$
 מ"מ של Y

נכחת (השערה) השנייה: X, Y מ"מ על אותו מרחב, X עם תוחלת סופית. אז $E[X|Y]$

עם שונות סופית, $V(X|Y)$ עם תוחלת סופית ותק"פ: $V(X) = E[V(X|Y)] + V(E[X|Y])$

טענה: X, Y מ"מ על אותו מרחב. g פונ. אזי: $E[X \cdot g(Y)|Y] = g(Y) \cdot E[X|Y]$

אי שוויון מרקוב: X מ"מ אי שזי, ובעל תוחלת סופית, אזי: $P(X \geq t) \leq \frac{E[X]}{t}$ $t > 0$

אי שוויון צ'בישב: X מ"מ עם שונות סופית, אזי: $P(|X - E[X]| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$

חז' 333: $P(X - E[X] \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\sqrt{E[X]} + \alpha^2}$ *

$\alpha > 0$ $P(X - E[X] \leq -\alpha) \leq \frac{V(X)}{\sqrt{E[X]} + \alpha^2}$ *

בחוק המזג של המ"מ חז' 334: $X_1, \dots, X_n$ מ"מ בעלי מתאם ρ שווה התפוצות

ק' $V(X_i) < \infty$ אזי $0 < \epsilon$: $P(|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E[X_1]| > \epsilon) \leq \frac{V(X_1)}{n \cdot \epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

א"ש 'וס': $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה, X מ"מ ק' $P(X \in \mathbb{I}) = 1$ ובעל תוחלת סופית.

אזי: $E[f(X)] \geq f(E[X])$

שיטת המומנטים הראשון: X מ"מ אי שזי, שמתקבל ערכים שמיים. אז $P(X > c) \leq E[X]$

שיטת המומנטים השנייה: X מ"מ אי שזי, עם תוחלת ושונות סופיים, אז $P(X > c) \geq \frac{(E[X])^2}{E[X^2]}$

תוחלת-מקור

קריטריון שטולץ

משפט המרכזי: X מ"מ עם שונות סופית, $X_1, \dots, X_n$ בעלי אותו התפוצות כמו X .

עציר $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ונצטר $\hat{S}_n = \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}}$ כמוהם סכיות התקן של S מהתוחלת

אזי $a < b < \infty$: $P(a \leq \hat{S}_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

מקרה פרטי - צה מטאבן גפוס: $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$ עבור $0 < p < 1$ קבוע, אז $P(a \leq \hat{S}_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

שושלת מרקוב: $\{X_t\}$ קב' מצבים סופית S $\exists$ מטריצת מעבר P $\exists$ התפוצות התחלתית μ

תכונות מרקוב: אם A תצוי חק- $X_t, \dots, X_0$, כד $P_\mu(A)$ וקיים מצב x ק' $X_t = x$ $P_\mu(A) = P_\mu(X_t = x)$

אזי S $X_1, \dots, X_5 \in S$ מתקיים: $P_\mu(X_{t+1} = x_1, \dots, X_{t+5} = x_5 | A) = P_\mu(X_1 = x_1, \dots, X_5 = x_5)$

$$\pi = \pi \cdot P$$

התכנסות סטוכסטית: π קו-ש-

$$\forall x, y \in S \exists t \geq 0 \text{ s.t. } P^t(x, y) > 0$$

שישם אי-פירוק:

$$\gcd(T(x)) \quad T(x) = \sum_{y \in S} P(x, y) \cdot y \quad \text{המרחיב}$$

אי-פירוק $\Leftarrow$ מחזורי לרוב.

קיום התכנסות סטוכסטית: אם שרשרת יש התכנסות סטוכסטית
 יחידות: אם השרשרת אי-פירוק, התכנסות יחידה קנונית
 בתכנסות: אם השרשרת אי-פירוק ואי-מחזורי, התכנסות

$$\phi(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 1 \quad \text{① (נורמל)}$$

$$\phi(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 0 \quad \text{②}$$

$$\phi(z) = 1 - \phi(-z) \quad \text{③ סימטריה סביב 0}$$