

תרגוץ מן הסתברות

שערת ש מ"ט דאומטרי: $\frac{1-p}{p}$!

תבנית: יהי זיך טבעי. נציר מ"ט T_n והיות מ"ט ההסתברות ש טבעי הן

זי זקבות כלל ש ציון ז עציס.

$$E(T_n) = 2 \quad (2) \quad E(T_n | T_{n-1}) = 2 \quad (1)$$

פתרון: ישנן 2 מקרים. (עבור $E(T_n | T_{n-1})$)

א. בהסתברות $\frac{1}{2}$ התקם שם ע" ונני מ"ט ההסתברות הנוצ הן $T_{n-1} + 1$

ב. בהסתברות $\frac{1}{2}$ התקם פ"י, ומ"ט ההסתברות הנו: $T_{n-1} + 1 + T_n$

$$E(T_n | T_{n-1} = k) = \frac{1}{2} E(T_{n-1} + 1 | T_{n-1} = k) + \frac{1}{2} E(T_{n-1} + 1 + T_n | T_{n-1} = k) = k + 1 + \frac{1}{2} E(T_n)$$

$$\Rightarrow E(T_n | T_{n-1}) = T_{n-1} + 1 + \frac{1}{2} E(T_n) \quad \leftarrow$$

שקם את העק $P(T_{n-1} = k)$ בהסתברות $k + 1 + \frac{1}{2} E(T_n)$

$$E(T_n) = E(E(T_n | T_{n-1})) = E(T_{n-1} + 1 + \frac{1}{2} E(T_n)) = E(T_{n-1}) + 1 + \frac{1}{2} E(T_n) \Rightarrow E(T_n) = 2(E(T_{n-1}) + 1)$$

$$E(T_n) = 2(E(T_{n-1}) + 1) =$$

זנוט נסדר ע"י נכחת התנועת.

$$= 2(2(E(T_{n-2}) + 1) + 1) = \dots = 2^{n-1} E(T_1) + \sum_{i=1}^{n-1} 2^i$$

$E(T_1)$ כושת וזק הטכס.

ותכטטט את $E(T_n) \leftarrow M_n$ דאומטרי ע" כושת $\frac{1}{2}$ כן $E(T_1) = 2$ כן.

$$E(T_n) = 2^{n-1} \cdot 2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^i = \sum_{i=1}^n 2^i = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$$

חסמים ע" הסתברות

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

אי שוין מקום: X מ"ט אי ש"י, אזי זי כדל:

תבנית: יהי X מ"ט אי ש"י. $E(X) = 10$

(1) זנו חכס ע $P(X \geq 12)$ (2) (תון כונוכלי $P(X \geq 2)$ וז חכס 10 וזי

$$P(X \geq 12) = ?$$

$$P(X \geq 12) \leq \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

פתון (1) זי כו כו"ט מקום.

$$P(X \geq 2) = P(X - 2 \geq 0) \leq \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

(2) (כתי ע" המ"ט $X - 2 \leftarrow Y$ אזי ש"י. $E(Y) = 8$

תרגיל: (ממבחן) משתנה מקרי X מקוים: $P(0 \leq X \leq 1) = 1$ - $E[X] = \frac{1}{2}$

בסמך, $p = P(X > \frac{1}{4})$. מה הערך המקסימלי של p ומהו

העבר התי האפשרי: (1) המקל 1 והתי 0

(2) p כהחזק $\frac{3}{4}$ של α

1/3 נ'ן 1 נ'ן (3)

(4) פה צריך להוסיף.

פתרון: נראה שהערך המקסימלי האפשרי הוא $1 - \frac{1}{N}$ (המקרה ש' $P(X = \frac{1}{2}) = 1$ מקיים את התנאים.

π_N y P_{ij} p. $EY = 1 - E(X) = \frac{1}{2}$: π_N n. $Y = 1 - X$: 1 n. p. $\otimes$ p. n. $\otimes$ n.

$$1-p = P(X \leq \frac{1}{4}) = P(Y \geq 3/4) \leq \frac{E(Y)}{3/4} = \frac{2}{3} \Rightarrow p \geq 1/3$$

✓ $E(X) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(|X - E[X]| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$
 · כ"כ $\alpha > 0$ - 1 $n \times n$ X י"ח: לכ' 3 סימפסון:

תשובה: מסביר כי רצויה, שנוטה לבנים ודתיים שדורשים קשרים נאמן אקטיווי.

חוצרים עם הנימ' עד שם הפקדן (מבין במקומות צויים). יה' א מל' החזרות

עס ווען וועט איר זיין צוריק אין ירושלים?

(1) הדיכוי של x (הוא $24-N$) הן שונה - $\frac{11}{12}$

$\sqrt{2}^{10}$ 5 ml 11c 10p 12-N 537 — 11 — ~~(X)~~

11
12 — חוק מת'חותו כותרת מת' הס' סוגר-12 (3)

(4) ארץ זבת חלב וסוכה.

פממן: הריסת קחת לסיפור קו כו הריצורם הדיקנים נעצום כמחממות צו"פ (היא): $\frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{12}$

$$V(X) = \frac{1}{12} B^2 = 11.12, E(X) = 12 \quad \Leftarrow X \sim G\left(\frac{1}{12}\right) \quad 17.5$$

(1) $\uparrow$ $V(X) = \frac{1}{44} = 0, E(X) = 12 \Leftrightarrow X \sim G(\frac{1}{2})$ 17
 $\sqrt{P(X=12) \approx 12} \leq \frac{11 \cdot 12}{12 \cdot 12} = \frac{11}{12}$ 18) 12, 3) $P(X=12) \leq \frac{132}{\alpha^2}$ 19) 12, 3) 20) 12, 3)

תמונה תרגול 2 הסתברות

תבסוס: כמון הנסיה מוקדן על השוים הוא קלס התפסדות לא ידועה על תוחלת μ .
 ברצוננו לחשב תוחלת זו ולכן אנו מתמנים בקצב א (נסיעות (כ"ר) ונחשב
 את הממוצע הזמן שזקחו. (כמון $\mu_1, \dots, \mu_n$ את כמון תפסדות שבצבנו,
 אנמנ, $\bar{x}$ את הממוצע. על א"ש צ"כיסק, מה צריך להיות μ רכי
 שהכינו שהממוצע שהשכנו $\bar{x}$ רחוק מהתוחלת ביותר מ- n סל דק הוא
 לכו ביותר 1% (כאמר הערך ש א עבור $P(|\bar{x} - \mu| \geq 10) \leq 0.01$
 ע. ה.י. השניות ידועה והיא 100.

פתרון: נחשב את התוחלת והשונות של $\bar{x}$.

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum E(x_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu, \quad V(\bar{x}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot 100 = \frac{100}{n}$$

$$P(|\bar{x} - \mu| \geq 10) \leq \frac{100}{\frac{n}{10^2}} = \frac{1}{n} \stackrel{?}{\leq} 0.01$$

$\updownarrow$
 $n \geq 100$ (יתן נקחת $n=100$)

(צ"כ בא"ש צ"כיסק: כ"ר)

$$P(x - E(x) \geq \alpha) \leq \frac{V(x)}{V(x) + \alpha^2}$$

$$P(x - E(x) \leq -\alpha) \leq \frac{V(x)}{V(x) + \alpha^2}$$

א. ישנן צ"כיסק (החצ צבצב): x מ"ו - סידם ידע

תרגיל: S_k , $1 \leq k \leq n$ תוצר מקרי פשוט. פומר $0 = S_0$ וצ"כ $1 \leq i \leq n$ מתקיים:

$$S_i - S_{i-1} \in \{-1, 1\}$$

$$E(S^2)$$

פתרון: ראשית נמנ $X_i = S_i - S_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$. ואז:

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

$$E(S_n^2) = E((\sum_{i=1}^n X_i)^2) = E[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j] =$$

$\downarrow$
 $\sum_{i=1}^n E(X_i^2) + \sum_{i \neq j} E(X_i X_j) = n \cdot 1 + n(n-1) \cdot 0 = n$
 $E(X_i^2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 1$

$$E(S_n^4) = n(3n-2) \quad (2) \text{ (תכ יד כי)}$$

$$E(S_0^4) = 0 = 0 \cdot (3 \cdot 0 - 2) \quad n=0 \text{ עבור}$$

$$S_n = S_{n-1} + X_n \quad \text{מתקיים: } E(S_{n-1}^4) = (n-1)(3(n-1)-2)$$

$$E(S_n^4) = E((S_{n-1} + X_n)^4) = E\left[\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} X_n^k S_{n-1}^{4-k}\right] \dots$$