

תרגון הסתברות

משפט: $X \sim G(p)$, $0 < p < 1$ אזי $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

הוכחה: נזכור כי התוחלת של X היא $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \cdot p = \frac{1}{p}$

$E(X^2) = \frac{2}{p^2}$ נוסק לחשב את התוחלת השני של X

נדרש את $\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k = \frac{1-p}{p^2}$

נזכור את פורמולת סכום האינסוף:

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p = \frac{2-p}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

חוקים חתמים:

הצבה: יהיו X, Y נ"מ קבלי תוחלת שני סופי. אזי מקבל הממוצע של X ו- Y הוא:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{\sigma_X \cdot \sigma_Y}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

⚠️ עבור X, Y מקבלי תוחלת סופי: $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$

ובנוסף, $\rho(X, Y) = \pm 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$, $a = \pm |a|$

תוצאה: בקצרה יש כל אמצעים, כל תפוחים ו-1 סל קנאות. מוציאים קאקדו וזא

הוצעה כל פחת. יהיו X, Y נ"מ תפוחים והתפוחים קבוצתה חשבו את $\rho(X, Y)$

פתרון: נשים זק-ש. $X + Y + Z = 10$ $\Leftrightarrow$ כיון X ו- Y אין הסתברות

מכיון שזוהי את $\rho(X, Y)$ מכלי הסתברות שהוצאו עכשיו $\rho(X, Y) \neq \pm 1$

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y) \\ \Rightarrow Cov(X, Y) &= \frac{V(X+Y) + V(X) - V(Y)}{2} = \frac{V(X+Y) - 2V(X)}{2} = \frac{V(10-Z) - 2V(X)}{2} = \frac{V(Z) - 2V(X)}{2} \\ &= \frac{V(X) - 2V(X)}{2} = -\frac{1}{2}V(X) \\ \Rightarrow \rho(X, Y) &= \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{-\frac{1}{2}V(X)}{V(X)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

תוצאה: ישנם 100 כדורים בחדר ונעדרים מט 1-100. על ס כדור מט אחר.

מוציאים כדור אחר וזוהי את התוצאה של כדורים. יהי X_i הערך שמופץ על הכדור

ה- i שיוצא. חשבו את $Cov(X_i, X_j)$ $\forall i, j$

פתרון: עבור $i = j$: $Cov(X_i, X_i) = Var(X_i) = \frac{(100-1)^2}{12} = \frac{99^2}{12}$

נשים זק-ש. $X_i \sim U[1, 100]$, $X_j \sim U[1, 100]$ ורק $i \neq j$: $Cov(X_i, X_j) = -1$

המשך פתרון: עבור $i \neq j$ נבדוק חישוב אחר. נציג n כמספר $i=1, \dots, 100$

באותו אופן כפי שנתון קשורה, אבל תחת ההנחה שהקבוצה של הרכזורים.

$$0 = V(\sum_{i=1}^{100} X_i) = \sum_{i=1}^{100} V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j) =$$

$$\text{Cov}(X_{i_1}, X_{j_1}) = \text{Cov}(X_{i_2}, X_{j_2}) : \begin{matrix} i_1 \neq j_1 \\ i_2 \neq j_2 \end{matrix} \Rightarrow 100 \cdot \frac{99}{100} + 2 \cdot \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot \text{Cov}(X_1, X_2)$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X_1, X_2) = -\frac{99}{100} = \text{Cov}(X_i, X_j) \quad \blacksquare$$

תוחלת ושונות חותמה

- כו מין הדורות כמו כשיעור ...

תכונות:

אזון הנורה נמצא במערה עם 3 פתחים, 1 מוביל החוצה. אם יבחר הפתח הנכון יצא.

מחשבה נכון 7 שעות, אחת 'חצי צנק' והתחלה תוך 3 או 5 שעות.

כא שם אזון בחר פתח באקראי בהסת' שווה לכל דמות בהחלטות הקודמות.

יהי X משך הזמן שיקח לו לצאת מהמערה מצא את $E[X]$.

פתרון: נציג Y מ"מ

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{הבחירה הראשונה} \\ 3 & \text{שם אזור 1-2} \\ 9 & \text{אזור 3-4-5-6-7-8-9-10} \end{cases}$$

הבחירה הראשונה היא 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10
הבחירה השנייה היא 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10
הבחירה השלישית היא 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10

$$E[X] = E[E(X|Y)] = E[X|Y=1] \cdot P(Y=1) + E[X|Y=3] \cdot P(Y=3) + E[X|Y=9] \cdot P(Y=9) =$$

$$= \frac{1}{3} [7 + 5 + E[X]] + \frac{1}{3} E[X] = 5 \Rightarrow E[X] = 15$$

טענה: יהי N מ"מ שלקבל ערכים סקסיים ויהי $\sum_{i=1}^N X_i$ מ"מ ק"מ ושני המסדות.

$$E[\sum_{i=1}^N X_i] = E[X] \cdot E[N]$$

הוכחה: נשתמש במשפט התוחלת השמור $N=n$

$$E[\sum_{i=1}^N X_i] = E[E[\sum_{i=1}^N X_i | N]] = \sum_{n=1}^{\infty} E[\sum_{i=1}^n X_i | N=n] P(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n E[X_1 | N=n] P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n E[X_1] P(N=n) = E[X_1] \cdot E[N]$$

תכונה: מטריצת המסבד הדין עד קבוצת הקבוצות הראשונה יהי N מס' הנחיות.

מכנים מסבד עם סדר $\frac{1}{N}$ של מסבדים אלו N פעמים. יהי R מס' הפעמים שיצא

אם המסבד הקדש ① הוא $N-1$ תצויות? ② חשבו את תוחלת R .

פתרון: ① כן. כי $(R|N=1)=1$ ו- $(R|N=2) \sim \text{Bin}(\alpha, \frac{1}{2})$

אכן תצויות כי $P(R=0|N=1) \neq P(R=0|N=2)$

החומר תרגומי ו-1 הסתברות

המשך פתרון התרגומי:

נניח נשים זכר $R|N=n \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$. עין אם n י

$$E[R|N=n] = 1$$

כל שם n הנ"ל $E[R|n]$ הוא קבוע ושווה ל-1. $\Leftarrow$

$$E[R] = E[E[R|N]] = 1$$

מבחן:

נתון מסבס עם סיכוי $p < 1$ על p . מסווג שיש ושיש עד שמתקבלת תוצאה
זהה זה מסבס הראשונה יהי X מספר ההסגות הכינוי לסקובס. מצא את התוחלת ולמה X .

פתרון:

נתונה ההסגה הראשונה (צדד אינדיקטור) 1_A ק p או אחת 0 או שניה 1 או שניה 0

$$E[X] = E[E[X|1_A]] = E[X|1_A=1] \cdot p + E[X|1_A=0] \cdot (1-p) = (1 + \frac{1}{p})p + (1 + \frac{1}{1-p})p(1-p) = 3$$

*