תרגול 4 הסתברות

<u>תרגיל</u>: יהי X מ"מ ו-n טבעי כך ש- $E[|X^{n+1}|]<\infty$. הוכיחו כי $E[|X^n|]<\infty$.

<u>מושג</u>: לרוב נהוג לקרוא ל- $E[X^n]$ המומנט ה-n-י של X.

<u>פתרון</u>: נשתמש בא"ש הבא - לכל $k\in\mathbb{R}$: $|k^n|\le|k^{n+1}|+1$

נשתמש במשפט שראינו שאם $\underset{P(X\le Y)=1}{X\le Y}$ אזי $E[X]\le E[Y]$

ולכן: $E[|X|^n]\le E[|X^{n+1}|+1]=E[|X|^{n+1}]+1<\infty$ ✓

מ"מ בלתי מתואמים:

יהיו X,Y מ"מ בעלי תוחלת סופית ובנוסף נניח שתוחלת מכפלתם קיימת.

נגיד ש X ו-Y בלתי מתואמים אם $E[X\cdot Y]=E[X]\cdot E[Y]$.

<u>משפט</u>: ב"ת ⇐ בלתי מתואמים. ⚠ הכיוון השני לא נכון בהכרח.

<u>תרגיל</u>: יהי $X\sim B(\frac{1}{2})$ ו- $Y=X^2$. האם X,Y ב"ת? בלתי מתואמים?

<u>פתרון</u>- נבחר ערכים 0 ו 1 ב-$\mathbb{R}$: $P(X=0,Y=1)=0\neq P(X=0)P(Y=1)=\frac{1}{4}$

לכן X,Y תלויים. באופן כללי $X\equiv Y$. נבדוק אם מתואמים:

$E[XY]=E[X^2]=E[X]=1/2$ ולא $E[X]E[Y]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

<u>תרגיל</u>: יהי (Ω,P) מרחב הסתברות כך ש- $\Omega=\{\omega_1,\dots\omega_4\}$ אחיד.

$$X(\omega)=\begin{cases}-2 & \omega=\omega_1\\ -1 & \omega=\omega_2\\ 1 & \omega=\omega_3\\ 2 & \omega=\omega_4\end{cases}$$

ו- $Y=X^2$. האם X,Y ב"ת ו/או בלתי מתואמים?

<u>פתרון</u>: X ו-Y תלויים. $P(X=1,Y=4)=P(\{\omega_3\}\cap\{\omega_1,\omega_4\})=P(\emptyset)=0$ נכונות זאת

$P(X=1)\cdot P(Y=4)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

לעומת זאת X ו-Y בלתי מתואמים:

$E[X]=\frac{1}{4}(-2-1+2+1)=0$

$E[XY]=\frac{1}{4}(-8-1+1+8)=0$ $\Rightarrow E[XY]=\underset{=0}{E[X]}\cdot E[Y]=0$ ✓

שונות ושונות משותפת

<u>הגדרה</u>: יהי X מ"מ כך ש- $E[X^2]<\infty$. אזי השונות של X: $Var(X)=E[(X-EX)^2]$

דרך נוספת לחשב את $V(X)$ היא: $V(X)=E[X^2]-E[X]^2$

<u>תכונות</u>: (1) שונות של קבוע $=0$

(2) לכל $a,b\in\mathbb{R}$ $V(aX+b)=a^2V(X)$

שונות משותפת ותכונותיה - כמו בשיעור....

תרגיל: במבחן בהסתברות יש 20 שאלות אמריקאיות כך שבכל שאלה 4 תשובות ו-1 נכונה. תשובה נכונה מזכה ב-6 נק' ושגויה מורידה 2 נק'. ישנן 8 שאלות יודע לענות עליהן ו-12 הנותרות מהן הוא מנחש. יהי Z הציון של אלון. מצא את התוחלת והשונות של Z.

פתרון:

נגדיר את X להיות מס' התשובות הנכונות של אלון מבין השאלות הקשות. $X\sim Bin(12,1/4)$. נרשום את Z כפונ' של X.

$$Z=6\cdot X+(12-X)\cdot(-2)+8\cdot 6=8X+24$$

נשתמש בתוחלת ושונות של X רמ"מ בינומי

$$E[Z]=8E[X]+24=8\cdot 12\cdot \tfrac{1}{4}+24=48$$

$$V(Z)=V(8X+24)=64V(X)=64\underbrace{(n\cdot p\cdot(1-p))}_{\text{שונות של בינומי}\ \circledast}=64\cdot 12\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{4}=144.$$

$\circledast$ אם $X_i\sim Ber(\frac{1}{4})$ אזי $V(X_i)=E[X^2]-(E[X])^2=p-p^2=p(1-p)$

$\Leftarrow$ בינומי זה סכום של משתנים מקריים ברנולי בלתי תלויים. $V(X)=V(\sum X_i)=\sum V(X_i)=$
$=np(1-p)$

תרגיל: לאלון יש סכום כסף שהוא רוצה להשקיע. הוא צריך לבחור בין אפיק א' שנותן רווח X ואפיק ב' שנותן רווח Y (עבור השקעה של כל הסכום). הוא גם יכול לפצל את ההשקעה לפי פרמטר $\alpha\in[0,1]$ ולקבל: $Z(\alpha)=\alpha X+(1-\alpha)Y$

הניחו כי: (1) $0<E[X]=E[Y]<\infty$

(2) $0<V(X)<V(Y)<\infty$.

כיצד הוא צריך להשקיע אם הוא רוצה למקסם את תוחלת הרווח ובו זמנית למזער סיכון (השונות תהווה מדד לסיכון)?

פתרון: נשים לב שלכל $\alpha\in[0,1]$ נקבל ש- $E[Z_\alpha]=\alpha E[X]+(1-\alpha)EY=$
$=E[X]=E[Y]$ ולכן בכל מקרה תוחלת הרווח קבועה.

נחשב את השונות של $Z(\alpha)$: $V(Z(\alpha))=V(\alpha X+Y-\alpha Y)=V(\alpha X)+V((1-\alpha)Y)+2Cov(\alpha X,(1-\alpha)Y)$

$$=\alpha^2(V(X)+V(Y)-2Cov(X,Y))+2\alpha(Cov(X,Y)-V(Y))+V(Y)$$

כי $X\neq Y$ ו- $V(X-Y)\geq 0$

קיבלנו פרבולה ב-α. $V(Z(\alpha))=\alpha^2\overbrace{V(X-Y)}^{>0}+2\alpha[Cov(X,Y)-V(Y)]+V(Y)$

נ"ב זו פרבולה צוחקת.

המשך תרגול 10 הסתברות

המשך התרגול: נמצא נק' מינימום לפונק' $V(\alpha)$:

$$\alpha_{min} = \frac{-Cov(X,Y)+V(Y)}{V(X-Y)}$$

נשים לב ש- $\alpha_{min}\in[0,1] \iff$

① $Cov(X,Y)\le V(Y)$

② $-Cov(X,Y)+\cancel{V(Y)}\le V(X-Y) = V(X)+\cancel{V(Y)}-2Cov(X,Y) \Rightarrow Cov(X,Y)\le Cov(X)$

נשים לב שתנאי 2 ⇐ 1 כי $V(X)<V(Y)$. לכן מספיק להתייחס אליו. לסיכום:

(א) אם $V(X)<Cov(X,Y)$ אזי $\alpha_{min}>1$ ⇐ הערך המינימלי בקטע הוא עבור $\alpha=1$

לכן במקרה זה נשקיע את הכל ב-X.

(ב) אם $V(X)\ge Cov(X,Y)$, יש להשקיע לפי ה- α_{min} שקיבלנו. ■

תרגיל: אלון ובן אורגנו מסיבה של n זוגות וסידרו את כל האנשים בשורה באקראי. $X=$ מס' הזוגות שבני הזוג עומדים בסמוך אחד לשני.

מצאו תוחלת ושונות של X.

$1\le i\le n$

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{הזוג ה-}i\text{ סמוכים}\\0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

פתרון: נחשב בעזרת פירוק לאינדיקטורים. סידור-

$$P(X_i=1)=\frac{\overbrace{(2n-1)!}^{\text{סידור 2n-1 בנוקיד}}\cdot \overbrace{2!}^{\text{סידור פנימי}}}{(2n)!}=\frac{1}{n}\Rightarrow E[X_i]=\frac{1}{n}\underset{\text{לינאריות התוחלת}}{\Rightarrow} \underline{E[X]=1}\ \checkmark$$

נחשב את השונות:

$$V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\overbrace{V(X_i)}^{\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})}+\sum_{i\ne j}Cov(X_i,X_j)$$

נמצא עבור $1\le i\ne j\le n$ את $Cov(X_i,X_j)$:

$$Cov(X_i,X_j)=E[X_iX_j]-E[X_i]E[X_j]=P(X_i=1=X_j)-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(2n-2)!\cdot(2!)^2}{(2n)!}-\frac{1}{n^2}=\frac{2}{n(2n-1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{2n-2n+1}{n^2(2n-1)}=\frac{1}{n^2(2n-1)}$$

$X_i\cdot X_j=1\iff X_i=1\wedge X_j=1$

נציב חזרה ונקבל:

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\sum_{i\ne j}\frac{1}{2n^3-n^2}=\frac{n-1}{n}+\underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{מס' האפשרויות לבחור } i,j \text{ שונים}}\cdot\underbrace{2}_{\text{סידורים פנימיים } i,j}\cdot\frac{1}{n^2(2n-1)}=\ldots=\frac{2n-2}{2n-1}$$ ■

תרגיל: מטילים קוביה 100 פעמים. יהי X מס' ההטלות בהן קיבלנו 2 או 3, ו-Y מס' ההטלות בהן היה 1 או 2. חשבו את $Cov(X,Y)$.

פתרון: נפרק את X לאינדיקטורים $(X_i)_{i=1}^{100}$ ואת Y לאינדיקטורים $(Y_i)_{i=1}^{100}$

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{בהטלה ה-}i\text{ יצא 2/3}\\0 & \text{אחרת}\end{cases}\qquad Y_i=\begin{cases}0\\1 & \text{בהטלה ה-}i\text{ יצא 1 או 2}\end{cases}$$

$$Cov(X,Y)=Cov\left(\sum_{i=1}^{100}X_i,\sum_{j=1}^{100}Y_j\right)=\sum_{i,j=1}^{100}Cov(X_i,X_j)$$

נחשב את $Cov(X_i,Y_j)$ עבור $1\le i\le j\le 100$.

$$Cov(X_i, \cancel{X}_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \rightarrow \text{בת"ל } X_i, Y_j \\ \cancel{E[X_i]E}\ E[X_iY_i] - E[X_i]E[Y_i] = & i = j \end{cases}$$

$E[X_iY_i] - E[X_i]E[Y_i] = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$ אז $i = j$ אם

$$Cov(X, Y) = \sum_{i=1}^{100} Cov(X_i, Y_i) = \frac{100}{18} = 5\frac{5}{9}$$