

תרגו 9 הסתברות

תוכנית

$$E(cX) = cE(X)$$

עוצאותיות: * עבור X מ"מ עם תוחלת וקיום $c \in \mathbb{R}$.

$$E(cX) = c \text{ אם } c=0$$

$$E(b) = b \text{ עבור } b \in \mathbb{R} \text{ קבוע}$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \text{ (כאשר אין יתרון מוסבר)}$$

שכר: כל ערך בעל הסתברות מקסימלית.

$$P(X=m) = \frac{1}{2}, P(X \leq m) = \frac{1}{2} \text{ עבור } m \text{ כך ש-}$$

$$E(Y^2) - E(Y) \text{ חסכונית. } Y=2^X \text{ עבור } X \sim \text{Bin}(n, p)$$

פתרון: נשים לב $0 \leq Y \leq 1$ ונדרוש את התפוצה בעזרת תנאי סטורט

אין בעיה של הדדוקציה.

$$E(Y) = \sum_{k=0}^n k P(Y=k) = \sum_{m=\log_2 k}^n 2^m P(X=m) = \sum_{m=0}^n 2^m P(X=m) = \sum_{m=0}^n 2^m \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

$$= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (2p)^m (1-p)^{n-m} = (2p+1-p)^n = (1+p)^n$$

$$E(Y^2) = \sum_{m=0}^n 2^{2m} P(X=m) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (4p)^m (1-p)^{n-m} = (1+4p)^n$$

תרגו 8: סוכרים קודם קאוק, כול תלוי, כאשר n נבחר באופן מתקן הספחה

$\{0, \dots, 9\}$, נגד הישר לטובים האחרים. (כאן n - אולי תלוי הדפוס "מ")

כאן: מהי תוחלת X ?

פתרון: ניתן למצוא את התפוצה X אבל זה יהיה מאוד מסובך, וזמן נוסף את

X לאינדקסורים / מ"מ מ"מ. נבחר X_i אינדקסורים ($i=1, \dots, 9$): $X_i = \begin{cases} 1 & \text{אם } X_i \text{ הוא האינדקס } i \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

$$X = \sum_{i=1}^9 X_i$$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^9 X_i\right] = \sum_{i=1}^9 E[X_i] = \sum_{i=1}^9 (1 \cdot P(X_i=1) + 0 \cdot P(X_i=0)) = \sum_{i=1}^9 P(X_i=1) = \sum_{i=1}^9 \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

תרגו 3: יהיו מ"מ X, Y כך ש- $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ו- $Y \sim \text{Bin}(n, q)$. את התוחלת של XY .

פתרון: נשיה ונתקדם (נראה לאינדקסורים):

נבחר את X למ"מ עם $X_i = \text{Bin}(1, p)$, $Y_i = \text{Bin}(1, q)$, נבן

$$E[XY] = npq$$

עבור $Y \sim H(n, p)$ נבדוק שהצפייה של Y היא $n \cdot p$ (הצפייה תהיה

אותה התפלגות. נציג את Y כסכום של n משתנים בלתי תלויים Y_i $i=1, \dots, n$

ובנקודת השיוויון. $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$ נטען את התפלגות Y_i :

$$P(Y_i = 1) = \frac{p}{n} \Rightarrow E(Y) = \sum_{i=1}^n \frac{p}{n} = n \cdot \frac{p}{n}$$

תרגיל: בחנות פחת הקנה ישם 7 תפוחי זהב אחדים. ארון קונה 5 פחת

בארק. בן המוכר מניחם על שולחן אחד, ואם 3 פחת

לפניו את תוחלת המכירה שלו.

פתרון: Q המכירה שלו. נציג את Q כצירוף של 7 משתנים בלתי תלויים X_i (כאן)

$$Q = 2X + (5-X)3 = 2X + 15 - 3X = 15 - X$$

$$E(Q) = 15 - E(X) = 15 - 5 \cdot \frac{7}{15} = \frac{38}{3}$$

כן

תרגיל: מטריצת המעבר של n מספרות הוצגים כאשר על כל מספר מופיעה הסכמה 1 .

נציג את X כצירוף של n משתנים בלתי תלויים X_i (כאן $X_i = 1$ או 0)

מסתמך באותה מספרות (כל המספרות) ולפיכך Y_i נאמר הערכים.

$$Z = \sum_{i=1}^n Z_i, \quad Z_i = 1 \text{ if } X_i = Y_i, \quad X = \sum_{i=1}^n X_i$$

① $P(Y_i = 1) = ?$: נבדוק את המסתברות יש הסת' $\frac{1}{2}$ ציפיהם על 1 . (כאן)

$A_{j \rightarrow i}$ מטריצת המעבר מספר j למספר i .

$$P(Y_i = 1) = \sum P(Y_i = 1 | A_{j \rightarrow i}) P(A_{j \rightarrow i}) = \sum \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}$$

② $P(Y_i = 1 | X_i = 1)$: נשתמש שם בניכוח ההסת' השמיה.

$$\begin{aligned} P(Y_i = 1 | X_i = 1) &= \sum_{j \neq i} P(Y_i = 1 | X_i = 1, A_{j \rightarrow i}) P(A_{j \rightarrow i}) + P(Y_i = 1 | X_i = 1, A_{i \rightarrow i}) P(A_{i \rightarrow i}) = \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

③ $P(Z_i = 1) = ?$: שם באותה צורה

$$\begin{aligned} P(Z_i = 1) &= \sum_{j \neq i} P(Z_i = 1 | A_{j \rightarrow i}) P(A_{j \rightarrow i}) + P(Z_i = 1 | A_{i \rightarrow i}) P(A_{i \rightarrow i}) = \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

שם $X_i = X_j$ שם $X_i = X_j$

④ $E[Z] = ?$: נשתמש בצירוף המשתנים Z_i באותה צורה

$$E[Z] = E\left[\sum_{i=1}^n Z_i\right] = \sum_{i=1}^n E[Z_i] = \sum_{i=1}^n \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}(n+1)$$

המשך תרגוי 9 הסתברות:

$$|\Omega| = n!$$

$$P(Z=n|X=k)=? \quad (5)$$

$$|\Omega| = \binom{n}{k} \quad P(Z=n|X=k) = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

והסתברות היא $\frac{1}{\binom{n}{k}}$ כי אין משמעות בהחצפה בין מספרות עם אותו הערך.

$$P(Z=n) = \sum_{k=0}^n P(Z=n|X=k) \cdot P(X=k) \stackrel{X \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})}{=} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n} \cdot P(Z=n) = ? \quad (6)$$

$$\textcircled{7} \text{ עבור } n=15, P(Z=0)=2 \cdot \text{הסתברות היא } 0. \text{ מאחר ומי המספרים או לאי ותמיד}$$

תיווג לנו "שורת" של מספר שצבור נמקד בו היה אותו הערך קודם לכן.

בעיה: קובץ v בגודל $G=(V,E)$ נקרא מקובץ אם הוא אינו מופע של G .

יהי $2 \geq n$ מספר $1 < p < 0$. נגדיר P מקרי עם n קוב' והסתברות p

כל צמד $x = \text{מס' הקוב' המסומס}$. נגדיר את $E[x]$.

פתרון: (פרק 5-2 אינדקסיות) x סופר $(1-p)^{n-1}$ r מקוב' 1 אחרת 0 $x_r = \int_0^1$ $v \in V$

$$E(x) = \sum_{v \in V} E(x_r) = \sum_n (1-p)^{n-1} = n(1-p)^{n-1}$$