תרגול 8 הסתברות

אי תלות של מ"מ

משפט: כל תת קב' של מ"מ בת"ל גם היא קב' של מ"מ בת"ל.

משפט: יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ בת"ל ו- $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$. נגדיר $Y=f(X_1,\dots,X_n)$ אזי $Y,X_1,\dots,X_n$ בת"ל.

מסקנה: אם $X_1,\dots,X_n$ מ"מ בת"ל ו- $E_1,\dots,E_n\subseteq\mathbb{R}$ אזי:

$$P(X_1\in E_1,\dots,X_n\in E_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\in E_i)$$

תרגיל: מס' ביצי חופש שתרנגולת מטילה ביום מתפלג אחיד בין 1 ל-4.
מכל ביצה יבקע בהסתברות $\frac{1}{3}$ אפרוח באופן בת"ל בביצים האחרות.
יהי X- מס' הביצים שהוטלו
Y - " האפרוחים שבקעו.

1. מצאו את ההתפ' המשותפת של X,Y.
2. האם X,Y תלויים?
3. מצאו התפ' $X|Y=3$

פתרון: נראה את הפתרון בעזרת נוסחה:

$$P(X=k,Y=l)=P(Y=l|X=k)\cdot P(X=k)=\frac{1}{4}\cdot\binom{k}{l}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{l}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-l}$$

$Y|X=k\sim Bin(k,\frac{1}{3})$

$l\le k$
$1\le k\le 4$
$0\le l\le 4$

אחרת ההסתברות היא 0.

2. המ"מ תלויים. ניקח $l=4$, $k=1$: $P(X=1,Y=4)=0\neq P(X=1)\cdot P(Y=4)>0$

3. לכל $k\neq 3,4$: נקבל $P(X=k|Y=3)=0$. עבור $k=3$

$$P(X=3|Y=3)=\frac{P(X=3,Y=3)}{P(Y=3)}=$$

תכלו :)

תרגיל: אלון מטיל 2 קוביות הוגנות, אחת בכל פעם. X- תוצאה ראשונה.
Y - תוצאה מקסימלית.

מצאו את ההתפלגויות של: (1) $Y|X=2$ (2) $X|Y=3$ (3) X,Y תלויים?

פתרון: הערכים של $Y|X=2$ יכולים להיות 2 עד 6:

(1) $P(Y=2|X=2)=\frac{P(Y=2,X=2)}{P(X=2)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{6}}=1/3$

$P(Y=k|X=2)=\frac{P(Y=k,X=2)}{P(X=2)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}$

② הערכים של- $X|Y=3$ מקבל בהסת' חיובית הם $1,2,3$:

$$P(X=1|Y=3)=\frac{P(X=1,Y=3)}{P(Y=3)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=2|Y=3)=\frac{P(X=2,Y=3)}{P(Y=3)}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=3|Y=3)=1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=3/5$$

③ הטענה תלויים: $P(X=4,Y=1)=0\neq P(X=4)\cdot P(Y=1)$

צימוד:

<u>הגדרה</u>: יהיו שתי התפלגויות μ_1,μ_2. צימוד של ההתפלגויות זה התפלגות על מישור μ כך שההתפלגויות השוליות הן μ_1 ו- μ_2.

באופן דומה ניתן לצמד בין מ"מ X ו- Y ע"י הגדרת מרחב הסתברות (Ω,P) עליו מוגדרים X ו- Y כך שההתפלגות המשותפת שלהם היא הצימוד של ההת' השוליות.

מ"מ פואסוני:

מ"מ X מתפלג פואסונית עם פרמטר λ אם $P(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ לכל $k\in\mathbb{N}$

<u>משפט</u>: יהיו סדרת מ"מ $X_1,X_2,\dots$ כך ש- $X_n\sim Bin(n,p_n)$ ו- $n\cdot p_n\to\lambda$

אזי לכל k קבוע $P(X_n=k)\xrightarrow{n\to\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$

<u>תרגיל</u>: אדון עובד במוקד שירות אליו מתקשרים בממוצע λ אנשים בדקה.
מה ההסתברות שבדקה מסוימת יתקשרו 10 אנשים? (נניח שהאוכלוסיה גדולה)

<u>פתרון</u>:

נניח שהאוכלוסיה בגודל N וניקח את הגבול של $N\to\infty$.

נניח X - מס' האנשים שהתקשרו למוקד בדקה מסוימת.

ההסת' שכל אדם התקשר מתוך ה-N אנשים היא $\frac{\lambda}{N}$ (כלומר מס' האנשים בממוצע שהתקשרו בדקה הוא λ).

$$P(X=10)=\binom{N}{10}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^{10}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{N-10}=$$

$$=\frac{N!}{10!(N-10)!}\cdot\frac{\lambda^{10}}{N^{10}}\cdot\frac{\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N}{\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{10}}$$

נחשב את ההסת' בגבול $N\to\infty$:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N!}{10!(N-10)!\cdot N^{10}}=\lim_{N\to\infty}\frac{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-9)}{10!\cdot N^{10}}=\frac{1}{10!}$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N}{\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{10}}=\frac{e^{-\lambda}}{e}\quad\Rightarrow\quad\lim_{N\to\infty}P(X=10)=\frac{1}{10!}e^{-\lambda}\cdot\lambda^{10}$$

קיבלנו התפלגות פואסונית ■

המשך הסתברות תרגול 8:

תרגיל: מס' המכוניות X הנכנסות לצומת הסדרך בשעה מתפלג פואסונית עם פרמטר λ. כל מכונית הנכנסת לצומת פונה ימינה בהסתברות p ושמאלה $1-p$ באופן בת"ל במכוניות האחרות (וגם בהגדרה).

נסמן ב- X_R את מס' המכוניות הפונות ימינה בצומת בשעה כלשהי, וב- X_L את מס' המכוניות הפונות שמאלה באותה שעה.

1) מצאו את התפלגות X_L ו- X_R.

פתרון: התומך של ההתפ' של X_L ו- X_R הוא כל המס' הטבעיים ו0.

$$P(X_R=k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{נתונה ע"פ } X}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(X_R=k|X=n)\cdot P(X=n) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X_R=k|X=n)P(X=n) =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\cdot\frac{p^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}\cdot\frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\frac{p^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-p)^m}{m!}\lambda^{m+k} = \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{((1-p)\lambda)^m}{m!} =$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\frac{p^k\lambda^k}{k!}\cdot e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\cdot\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

$\Leftarrow X_R\sim Poisson(\lambda p)$

$X_L\sim Poisson(\lambda(1-p))$ באותו אופן

⚠ אם יש משתנה פואסוני λ ועורכים ניסוי בת"ל לכל המשתנה (הצלחה p) ניתן להשתמש בזה - יצא לנו $Poisson(\lambda p)$

2) האם X_L ו- X_R תלויים?

פתרון: הם בת"ל! כי אנו לא יודעים כמה מכוניות נכנסו!

נראה לפי הגדרה:

$$P(X_L=\ell, X_R=r) \overset{\ell,r\in\mathbb{N}}{=} P(X_L=\ell, X_R=r|X=\ell+r)\cdot P(X=\ell+r) =$$

$$= \binom{r+\ell}{r}p^r(1-p)^\ell\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{\ell+r}}{(\ell+r)!} = \lambda^r\cdot\frac{p^r}{r!}\cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^\ell\cdot\frac{(1-p)^\ell}{\ell!} =$$

$$= \underbrace{\frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda p}}\cdot\underbrace{e^{-\lambda(1-p)}\cdot\frac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!}} = P(X_R=r)\cdot P(X_L=\ell)$$

3) האם X_R, X_L תלויים בהינתן $X=n$? כן!

פתרון: $X_L+X_R=n$ והם תלויים עפ"י התכונות הבינאריות הנ"ל.

חוסר זיכרון של התפ' גיאומטרית:

תרגיל: לעדן יש מטבע עם הסתברות p לצאת עץ ו-$(1-p)$ פלי.

מטילים את המטבע עד שיוצא עץ בפעם הראשונה.

X = מס' הטלות המטבע.

בהינתן שכבר בוצעו n הטלות שיצאו "פלי", מה ההסת' שיבוצעו $n+1$ הטלות סה"כ?

<u>פתרון:</u>

$$P(X=n+1 \mid X>n) = ?$$

$$= \frac{P(X=n+1,\ X>n)}{P(X>n)} = \frac{P(X=n+1)}{P(X>n)} = \frac{(1-p)^n \cdot p}{(1-p)^n} = p$$