

4 מתמטיקא סטטיסטיקה

הסתברות חזרתית

יהי מרחב הסת' $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ושאלות סגור הסתברות חזרתית B . מרחב הסתברות

$$P(\omega|B) = \int_{\omega \in B} \frac{P(\omega)}{P(B)} dP(\omega)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

מסתברות יחסית: אם שאלות A

ההסתברות חזרתית: הסת' מותנה היא בעצמה הסתברות! (א.ש.ג., תא. נמוך...)

חוק הכפל: יהיו שאלות $A_1, \dots, A_n$ כך ש- $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) > 0$. אז:

$$P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

נוסחת ההסתברות השלמה: יהי $B_1, \dots, B_n$ חלוקה של מרחב הסת' Ω כך ש-

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i) \quad \text{אם } P(B_i) > 0, \forall i, \text{ ו- } \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$$

חוק ס"ל: יהיו שאלות A ו- B בעלי הסתברות חזרתית, אז:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

תרגיל 1: בהינתן שכל בורות הממוספרים 1-4 שווים. שאלה 4 נחלקה.

א) מה הסכום של הבורות עם המ' 7 בחלף?

פתרון: כל הבורות שם בורות אחד שלוקח לסיכור השווה.

הסכום ש-7 יהיה במקום ה-1 בסידור השווה הוא 0.1 ולכן ההסת' של השאלות

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1 \cdot \binom{3}{3}}{\binom{4}{4}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

המקום A הוא $P(A) = 0.4$ (הסת'?)

ב) ידוע ש-9 בחלף מה הסכום שם 7 בחלף?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1 \cdot \binom{2}{2}}{1 \cdot \binom{3}{3}} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 1$$

פתרון: נסמן ב- B את השאלות בו 9 בחלף. נחשב:

ג) ידוע שאין מ' קטן מ-4 בחלף מה הסכום ש-7 בחלף?

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1 \cdot \binom{2}{2}}{\binom{4}{4}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

ד) ידוע שאין מ' קטן מ-4 בחלף, מה ההסתברות ש-7 לא בחלף?

$$P(A^c|C) = 1 - P(A|C) = \frac{3}{4}$$

טענה: יהיו 3 מצבי מאונות B, C במרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{P})$ P - $P(B \cap C)$ כד $P(B \cap C)$ מרחב הסתברות המותנה בו מתקיימת תחילה B ואחר כך C והוא: $(\Omega, \mathcal{P}, P(\cdot|B \cap C))$ תכונה: יהי מאונות $A \subseteq \Omega$. ידוע כי $P(A|C)$ אפני התבטאות ולכן נציג

$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$ $P(A|C) = P(A \cap C) / P(C)$ $P(A|B \cap C) = P(A \cap B \cap C) / P(B \cap C)$ $P(A|B) = P(A|B \cap C) \cdot P(B \cap C) / P(B)$ $P(A|B) = P(A|B \cap C) \cdot P(B \cap C) / P(B)$ $P(A|B) = P(A|B \cap C) \cdot P(B \cap C) / P(B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \stackrel{P(B \cap C) \leq P(B)}{\geq} \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = P(A|B \cap C)$$

תוצאה: בן הוא כורה פסח שהחזיס לכת ציור אלונה מתנה צחתינה. הוא ניתן

לה זמקור בין 2 קופסאות צהות חזניות: P קופסה א' לבנה 2 יפואים ופסח

P קופסה ב' לבנה 2 יפואים ו-2 פסחים.

מאונות וכן היא אם מתחשק הוא ניתן לה צחציא אמן מקופסה אחת שוקטי ווא

להחזיס במה צמחור. מה האסטטסיה האופטימלית מה חנות אלונה?

פתרון: אסטטסיה זו פני מפתחות ציור של אלונה (פסח/יפואים) צפצפות

תה פסח/להחזיס). יש צאונה 4 אסטטסיות אפשריות:

(1) צהי שור עז בחורה מקיית $P(A_1) = P(B_1) = \frac{1}{2}$ (2) א' וצ' יפואים-צהי שור אחרת צהחזיל

(3) צהחזיל $P(A_2) = P(B_2) = \frac{1}{2}$ (4) אם יוצא פסח צהי שור נאמת צהחזיל.

נסמן A_1, B_1 האירועות בקן אלונה כחודש חזרה את קופסאות א' ו-ב' בהתאמה

" " " " B_2, A_2

$$P(A_2) = P(B_2) = \frac{1}{2} \quad (1) \quad P(A_2) = P(A_1) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$P(A_2) = P(A_1) \cdot \frac{2}{3} + P(B_1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad (3)$$

$$P(A_2) = P(A_1) \cdot \frac{1}{3} + P(B_1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \quad (4)$$

תוצאה: (הכרז של פסח)

כרז 5 כדורים שמורים ו-3 זקנים. הם הוצאו של כדור מודק מחזירים אותו

יחז גם 4 נוספים מאותו הצבע. (1) מה הסתברות שהכדור הראשון שנצטל שמור?

(2) " " " " השני

(3) " " " " ה-3

פתרון

החשך הסתברות 4

פתרון התכונה:

$$P(\text{הראשון שחור}) = \frac{5}{8} \leftarrow \text{הכנסיג השחורית}$$

(1) נחשב ישירות בעזרת קומבי:

(2) נציג $W, B, i=1,2$ מאונות קדם הוצונו בשורה זו $W|B$ בהתאמה

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|W_1)P(W_1) = \frac{9}{12} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{8} = \frac{45+15}{96} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

(3) נבצע מספר שיקוף סימטרי. אם היינו מתחזים עם זמן 1 ושחור 1 אז מסתמי

סימטריה הלוסתריות צהובים שחור בפעם הראשונה זהה לזו של צהובים זמן בפעם הראשונה -

צ. אם נניח שהראשון ממונפים מ-1 עד 8 אז שאלות שיקוף סימטריה

ההסתברות צהובים בלתי סופית בפעם הראשונה היא $\frac{1}{8}$. לפי נניח שצביר השחור

ממונפים מ-1 עד 5 וזמן הסתמי שיצא שחור בפעם הראשונה הוא כסדר ההסתברות

צהובים צביר עם מטף עד 5 - זמן $\frac{5}{8}$

נניח תוצאות

יהיו צמד מאונות A, B ה- (Ω, P) . תאונותיהם הן A, B : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B) \\ P(A \cap B^c) &= P(A)P(B^c) \\ P(A^c \cap B^c) &= P(A^c)P(B^c) \end{aligned}$$

תכונה: בסדרה יש כל ספרי ההסתברות 5 עם פתונות ו-5 בי. הסתברות

אנדרה ספרטשה כיוקוואי. אכן משיל ספרטקטי. מנחם לאור יומי

הן שנים שבעים לאורמין וזקוק ספרטקטי.

נציג: A - הספרטט אכן כל פת B - הספרטטן כל פת.

(1) יהא A ו- B תצוים

פתרון: A ו- B תצוים. (בזק זפי ההצורה. נציג מאונות

$$P(A) = P(A|C)P(C) + P(A|C^c)P(C^c) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \quad (\text{אונות צביר})$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap B|C)P(C) + P(A \cap B|C^c)P(C^c) = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \approx 0.253 \neq \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

המאונות תצוים.

הנחה

$$P(A \cap B | C) = P(A | C) \cdot P(B | C)$$

הנחה חשובה!