

הסתברות

נוסחת הסימיון והפרדוקט:

נוסחת הפד ודפנדנד 2-6 מאורעות: יהיו A, B מאורעות במרחב הסת' $(\Omega, \mathcal{P})$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

הנחת: נסתכל על המאטריצה: $B, A \cdot B$ - הם זוגות מתחילים. $B \cup (A \cdot B) = B \cup A$

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A \cdot B) = \sum_{\omega \in A \cup B} P(\omega) = \sum_{\omega \in B} P(\omega) + \sum_{\omega \in A \cdot B} P(\omega) \quad \text{) } \textcircled{8}$$

שאלה צורה נכונה של $A \cap B - A \cap B = A \cap B$ וכן ק' נחלק:

$$P(A \cap B) + P(A \cdot B) = P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) + P(A \setminus B) &= P(A) \\ P(A \setminus B) &= P(A) - P(A \cap B) \\ P(A \setminus B) &= P(A \cup B) - P(B) \end{aligned} \Rightarrow P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B) \quad \square$$

הוכחה כללית עבור $\Omega = A_1, \dots, A_n$ הניחוק והסתברות $(\Omega, \mathcal{P})$:

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{1+|I|} P(\bigcap_{i \in I} A_i)$$

(תרגום: כל צויות מת"ש ס' סאקראי ס' ס' שטחן ע"ס. מזה והסתמכות)

הנהגת הנהלת המוסד (כסות סמוריס) 2

שאלה: $B = \{ \text{א, ב, ג, ד, ה, ו, ז, ח, ט, י} \}$ ו- $A = \{ \text{א, ב, ג, ד, ה, ו, ז, ח, ט, י} \}$

ממלכות {הצדדים ה' של A_0 } $1 \leq i \leq 10$ $A_0 = \mathbb{Z}$

$$P(B) = P(\bigcap_{i=1}^{10} A_i^c) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{10} A_i) = 1 - P(A_1) = 0.95$$

כעת נחשב את $P(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ בעזרת תוצאה והסימיה:

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{\substack{I \neq \emptyset \\ I \subseteq \{1, \dots, n\}}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i \in I} A_i)$$

ישנה היסטוריה רחבה: $P(A_i) = P(A_j) \forall 1 \leq i, j \leq n$ | כלל שוויון

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) \quad . \quad k \leq 5$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{10} A_i) = \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \binom{10}{k} P(A_1 \cap \dots \cap A_k)$$
 (כנס) (כנס) (*) (כנס) (כנס) (כנס) (כנס) (כנס) (כנס) (כנס)

$$P(A_1, \dots, A_k) = \frac{|A_1 \cap \dots \cap A_k|}{|I|} = \frac{(19-k)! \cdot 2^k}{|I|} \quad : k=0, 1, 2, 3$$

[Handwritten signature]

תרגיל: תהי קבוצה $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ ונבחר פונקציה f של A באחדות. מה הסכום

של בדיוק נה' שבת 1 - ס?

פתרון: נבדוק את המאורע המשותף $B = \bigcap_{i=1}^n A_i$ יהיה המאורע בו ישנה

נה' שבת בדיוק זהו. $B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap (\bigcap_{j \neq i} A_j^c))$ המאורעות A_i זרים וזן

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap (\bigcap_{j \neq i} A_j^c))$$

בנוסף המאורעות A_i הם תלויים משותף כימיה

$$= \binom{n}{1} P(A_1 \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c) = \binom{n}{1} \frac{|A_1 \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c|}{n!} = \binom{n}{1} \frac{1 \cdot |A_2^c \cap \dots \cap A_n^c|}{n!}$$

$$P(B) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot \frac{1}{k!}$$

$$P(B) = \left(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right) (n-1)!$$

$$P(B) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k!}$$

תרגיל: תהי הק' $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ ונבחר פונקציה f של A באחדות.

מה הסכום של f - ס מעט באורך n ?

פתרון: עם אחת מהאפשרויות $i=1, \dots, \binom{2n}{n}$ ישן n קאר' שמשיבותאס'ה.

$$i=1 \xrightarrow{\text{הקאר'}} 1, \dots, n \quad i=2 \xrightarrow{\text{הקאר'}} A_2 = \{ \dots \} \quad P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \frac{2}{n}$$

$$A(\binom{2n}{n}) = \{ \dots \}$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\binom{2n}{n}} A_i) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, \binom{2n}{n}\}} (-1)^{|I|+1} P(\bigcap_{i \in I} A_i)$$

$$P(A_i \cap A_j) = 0 \iff P(A_i \cap A_j) = 0 \iff A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\binom{2n}{n}} A_i) = \sum_{k=1}^{\binom{2n}{n}} (-1)^{k+1} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \dots = \frac{1}{n} (1 - \frac{1}{2^n})$$

הדיון: $S_0, \dots, S_n$ כאשר $S_0 = 0$, $S_i \in \mathbb{Z}$ לכל $1 \leq i \leq n$!

$S_{i+1} - S_i \in \{1, -1\}$ P רב כמה הזזות באורך n יש?

פתרון: אם הסדרה נסמרת באותו, מה הימ' $S_n = k$, $k \in \mathbb{Z}$?

$$P(S_n = k) = 0 \iff k < -n \text{ או } k > n$$

$$P(S_n = k) = \frac{\binom{n}{\frac{n-k}{2}}}{2^n} \iff \frac{n-k}{2} = a \iff n-k = 2a \iff k = n-2a$$